CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

[...]tains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

[redacted] [...]OCESSING COPY 25X1

COUNTRY	Czechoslovakia	REPORT	[redacted]
SUBJECT	Scientific Papers in the Field of Mathematical Machines and Instruments (In Czech)	DATE DISTR.	4 NOV 1957
		NO. PAGES	2
	ENCLOSURE ATTACHED PLEASE ROUTE	REQUIREMENT NO.	RD
		REFERENCES	
DATE OF INFO.	[redacted]		25X1
PLACE & DATE ACQ.			25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

[redacted]

[redacted] scientific papers in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague. The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech) are as follows:

NOV 26 1957

27 NOV 1957

LY/50

a.	Ing. Jaroslav Marsik	VUACH Novaky	Jednoduchny vypocet optimalnich parametru regulacnich obvodu
b.	Ing. Vaclav P[...]kerka	Vysoka skola zeleznicni	Jednoducha numericka methoda pro vypocet odezev regulacnich obvodu
c.	Ing. Jiri Rippl	VUTT Praha	Ciselny vypocet odezvy nelinearniho a casove promenneho regulacniho systemu
d.	Ing. Dr. Miroslav Salamon	VUACH Novaky	Impulsni modely
e.	Ing. Milan Balda	Regula-vyvoj, n.p. Praha	Elektromechanicky analogon regulacnich obvodu eman 1 (sic)
f.	Ing. Jiri Haskovec	Praha, LAT-CSAV	Projekt diferencialniho analysatoru laboratore pro automatisaci a telemechaniku CSAV
g.	Ing. Vaclav Cerny and Doc. Ing. Dr. Antonin Svoboda	Ustav matematickych stroju CSAV, Praha	Methoda synthesy pakovych mechanismu na diferencialnim analysatoru
h.	Prof. Dr. Ing. Zdenek Trnka, and Ing. Zdenek Kotek	Laborator pro automatisici a telemechaniku CSAV CVUT	Pouziti harmonickeho analysatoru v regulacni technice

25X1

Page Denied

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

S-E-C-R-E-T

[redacted] 25X1

COUNTRY	Czechoslovakia	**REPORT**	[redacted]
SUBJECT	Scientific Papers in the Field of Mathematical Machines and Instruments	**DATE DISTR.**	4 NOV 1957
		NO. PAGES	2
		REQUIREMENT NO.	RD
DATE OF INFO.	[redacted]	**REFERENCES**	25X1
PLACE & DATE ACQ.			

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

[redacted]

[redacted] scientific papers in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague. The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech) are as follows:

a.	Ing. Jaroslav Marsik	VUACH Novaky	Jednoduchny vypocet optimalnich parametru regulacnich obvodu
b.	Ing. Vaclav Pokerka	Vysoka skola zeleznicni	Jednoducha numericka methoda pro vypocet odezev regulacnich obvodu
c.	Ing. Jiri Rippl	VUTT Praha	Ciselny vypocet odezvy nelinearniho a casove promenneho regulacniho systemu
d.	Ing. Dr. Miroslav Salamon	VUACH Novaky	Impulsni modely
e.	Ing. Milan Balda	Regula-vyvoj, n.p. Praha	Elektromechanicky analogon regulacnich obvodu eman 1 (sic)
f.	Ing. Jiri Haskovec	Praha, LAT-CSAV	Projekt diferencialniho analysatoru laboratore pro automatisaci a telemechaniku CSAV
g.	Ing. Vaclav Cerny and Doc. Ing. Dr. Antonin Svoboda	Ustav matematickych stroju CSAV, Praha	Methoda synthesy pakovych mechanismu na diferencialnim analysatoru
h.	Prof. Dr. Ing. Zdenek Trnka, and Ing. Zdenek Kotek	Laborator pro automatisici a telemechaniku CSAV CVUT	Pouziti harmonickeho analysatoru v regulacni technice

25X1

Page Denied

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

...tains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, USC Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

[redacted]

PROCESSING COPY

COUNTRY	Czechoslovakia	REPORT	[redacted]
SUBJECT	Scientific Papers in the Field of Mathematical Machines and Instruments (In Czech) ENCLOSURE ATTACHED	DATE DISTR.	4 NOV 1957
		NO. PAGES	2
		REQUIREMENT NO.	RD
DATE OF INFO.	[redacted]	REFERENCES	
PLACE & DATE ACQ.			

25X1

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

[redacted]

[redacted] scientific papers in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague. The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech) are as follows:

25X1

NOV 26 1957

27 NOV 1957

LY/50

a. Ing. Jaroslav Marsik	VUACH Novaky	Jednoduchny vypocet optimalnich parametru regulacnich obvodu
b. Ing. Vaclav Pokerka	Vysoka skola zeleznicni	Jednoducha numericka methoda pro vypocet odezev regulacnich obvodu
c. Ing. Jiri Rippl	VUT Praha	Ciselny vypocet odezvy nelinearniho a casove promenneho regulacniho systemu
d. Ing. Dr. Miroslav Salamon	VUACH Novaky	Impulsni modely
e. Ing. Milan Balda	Regula-vyvoj, n.p. Praha	Elektromechanicky analogon regulacnich obvodu eman 1 (sic)
f. Ing. Jiri Haskovec	Praha, LAT-CSAV	Projekt diferencialniho analysatoru laboratore pro automatisaci a telemechaniku CSAV
g. Ing. Vaclav Cerny and Doc. Ing. Dr. Antonin Svoboda	Ustav matematickych stroju CSAV, Praha	Methoda synthesy pakovych mechanismu na diferencialnim analysatoru
h. Prof. Dr. Ing. Zdenek Trnka, and Ing. Zdenek Kotek	Laborator pro automatisici a telemechaniku CSAV CVUT	Pouziti harmonickeho analysatoru v regulacni technice
i. Ing. Bohumil Mirtes	VUT Praha	Elektronicke methody analogickeho vypoctu

S-E-C-R-E-T

[redacted]

25X1

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	FBI		AEC		OSI Ev	X		

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".) [redacted]

25X1

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

36

25X1

Page Denied

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

S-E-C-R-E-T

[redacted]

COUNTRY	Czechoslovakia	REPORT	[redacted]
SUBJECT	Scientific Papers in the Field of Mathematical Machines and Instruments	DATE DISTR.	4 NOV 1957
		NO. PAGES	2
		REQUIREMENT NO.	RD
DATE OF INFO.	[redacted]	REFERENCES	
PLACE & DATE ACQ.			

25X1

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

[redacted]

[redacted] scientific papers in Czech which were submitted for publication in the forthcoming annual report (#5-1957) (sic) of the Institute of Mathematical Machines and Instruments of the Czechoslovak Academy of Sciences located in Prague. The authors, their affiliation, and the titles of the papers (in Czech) are as follows: 25X1

a.	Ing. Jaroslav Marsik	VUACH Novaky	Jednoduchny vypocet optimalnich parametru regulacnich obvodu
b.	Ing. Vaclav P..kerka	Vysoka skola zeleznicni	Jednoducha numericka methoda pro vypocet odezev regulacnich obvodu
c.	Ing. Jiri Rippl	VUTT Praha	Ciselny vypocet odezvy nelinearniho a casove promenneho regulacniho systemu
d.	Ing. Dr. Miroslav Salamon	VUACH Novaky	Impulsni modely
e.	Ing. Milan Balda	Regula-vyvoj, n.p. Praha	Elektromechanicky analogon regulacnich obvodu eman 1 (sic)
f.	Ing. Jiri Haskovec	Praha, LAT-CSAV	Projekt diferencialniho analysatoru laboratore pro automatisaci a telemechaniku CSAV
g.	Ing. Vaclav Cerny and Doc. Ing. Dr. Antonin Svoboda	Ustav matematickych stroju CSAV, Praha	Methoda synthesy pakovych mechanismu na diferencialnim analysatoru
h.	Prof. Dr. Ing. Zdenek Trnka, and Ing. Zdenek Kotek	Laborator pro automatisici a telemechaniku CSAV CVUT	Pouziti harmonickeho analysatoru v regulacni technice
i.	Ing. Bohumil Mirtes	VUT Praha	Elektronicke methody analogickeho vypoctu

S-E-C-R-E-T

[redacted] 25X1

STATE	X	ARMY	X	NAVY	X	AIR	X	FBI		AEC		OSI Ev	X

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".) [redacted] 25X1

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

25X1

Page Denied

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

7. JEDNODUCHÝ VÝPOČET OPTIMÁLNÍCH PARAMETRŮ REGULAČNÍCH OBVODŮ

Ing. Jaroslav Maršík

VÚACH Nováky

Tato práce se zabývá jednoduchou methodou výpočtu optimálních hodnot konstant regulačního obvodu z jeho amplitudové frekvenční charakteristiky.

Způsob, který je tu uveden, je speciálním případem výpočtu podle Sartoriovy práce [1].

Hlavním autorovým příspěvkem je odvození vztahů, které umožňují značné zjednodušení výpočtů.

7.1. Úvod

Výpočet optimálních parametrů regulačního obvodu je při návrhu regulací důležitý, avšak obtížný problém, a to hlavně pro matematické nesnáze, které jsou s ním spojeny.

Všeobecně používaným kriteriem optimálnosti regulačního pochodu je kvadratická regulační plocha.

$$F = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

která dává v operátorovém tvaru

$$F = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\varepsilon(\mathrm{j}\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

(kde $\varepsilon(\mathrm{j}\omega)$ je absolutní hodnota Fourierovy transformace regulační odchylky $\varepsilon(t)$) velmi dobrý názor na kvalitu regulace.

Obecný výpočet integrálu (2) je však možný jen pro soustavy, jejichž přenos je racionální algebraickou funkcí, a je zpravidla velmi pracný.

Často bývá kromě požadavku minimálnosti regulační plochy ještě kladena podmínka malého přeregulování.

Jak bude ukázáno dále, dá se spojení těchto dvou požadavků využít k odvození optima bez výpočtu integrálu (2), a to fysikálně-matematickou úvahou, při čemž dostaneme obecné výsledky i pro složité soustavy poměrně snadno.

7.2. Odvození optima

Vycházejme ze dvou základních podmínek, v podstatě shodných se zmíněnými požadavky pro optimum:

a) Hodnota regulační odchylky musí být co nejmenší.

b) Ustáleného stavu regulačního pochodu musí být dosaženo co nejdříve, a pokud možno bez kmitů.

Pro operátorové vyjádření odchylky z toho vyplývá:

a) $|\varepsilon(\mathrm{j}\omega)|$ musí mít co nejmenší hodnotu v nejširším rozsahu frekvencí.

b) $|\varepsilon(\mathrm{j}\omega)|$ musí mít monotonní průběh v závislosti na frekvenci — bez resonančních vrcholů (poměr imaginární složky k reálné každého komplexního kořenu charakteristické rovnice funkce $\varepsilon(\mathrm{j}\omega)$ nesmí být příliš velký), aby bylo dostatečné tlumení kmitů.

Na základě těchto požadavků můžeme provést obecný rozbor regulačního obvodu, který se skládá z regulované soustavy s frekvenční charakteristikou S a regulátoru s charakteristikou R ($R = R(\mathrm{j}\omega)$, $S = S(\mathrm{j}\omega)$).

V některém místě soustavy předpokládejme vznik poruchy, která působí změnu regulované veličiny. Tato změna bude závislá na tvaru poruchy, místě, kde vznikla, a na charakteru soustavy a regulátoru. Regulátor má za úkol tuto změnu co nejvíce a co nejrychleji zmenšit, ať byla způsobena jakkoliv. Jeho funkci nejlépe zhodnotíme, porovnáme-li poměry před jeho zapojením a po něm.

Před zavedením regulace byla odchylka od žádané hodnoty ε_1.

Po připojení regulátoru se zmenší na hodnotu

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{1}{1 + SR}$$

Aby byla regulace optimální, musí výraz $\frac{1}{1+SR}$ vyhovovat těmto podmínkám:

a) Musí mít co nejmenší hodnotu v nejširším frekvenčním rozsahu,

b) musí mít monotonní průběh závislosti na frekvenci.

Výraz $\frac{1}{1+SR}$ si můžeme vyjádřit účelněji ve tvaru

Jeho minimum bude nejlépe splněno při

$$F = \frac{SR}{1 + SR} \to 1 \,. \tag{5}$$

Pro soustavy, jejichž frekvenční charakteristika v závislosti na frekvenci klesá, nebo alespoň nestoupá, bude požadavek (5) nejlépe splněn při frekvenci nulové (za předpokladu monotonnosti).

Musíme se tedy snažit, aby byla hodnota funkce $F = \frac{SR}{1 + SR}$ rovna hodnotě pro frekvenci $\omega \to 0$, pokud možno v širokém rozsahu.

$$F \xrightarrow{!} F(0) \,, \tag{6}$$

$$\frac{SR}{1 + SR} \xrightarrow{!} \left(\frac{SR}{1 + SR}\right)_{(\omega = 0)} . \tag{7}$$

Vyhovuje-li funkce F Bodeho podmínce vzájemné závislosti amplitudové a fázové charakteristiky, můžeme napsat podobný přibližný vztah i pro absolutní hodnotu $|F|$:

$$\left|\frac{SR}{1 + SR}\right| \xrightarrow{!} \left(\frac{SR}{1 + SR}\right)_{(\omega = 0)} , \tag{8}$$

a tedy i pro dvojmoc absolutní hodnoty, které výhodně použijeme v dalším:

$$\left|\frac{SR}{1 + SR}\right|^2 \xrightarrow{!} \left(\frac{SR}{1 + SR}\right)^2_{(\omega = 0)} . \tag{9}$$

To platí jen přibližně a za uvedených předpokladů. Je-li totiž funkce F prakticky konstanta (je frekvenčně nezávislá v širokém rozsahu), je i posun fáze zanedbatelný, a vektor F můžeme sčítat s hodnotou $F_{(0)}$ algebraicky.

Tento postup má praktické odůvodnění, protože odstraní mnohé nesnáze při výpočtu. Zjednodušení, které jsme tím získali, není však na úkor dobrého výsledku.

Jak si ukážeme na praktickém příkladě, může se této methody použít i v případě, že uvedená Bodeho podmínka není splněna (na př. u soustavy s dopravním zpožděním).

Ze vztahu (8) vyplývá, že absolutní hodnota frekvenční charakteristiky $|F|$ má být pokud možno co nejméně závislá na frekvenci. To platí i o její dvojmoci $|F|^2$. Aby funkce $|F|$ měla tuto požadovanou vlastnost, musí mít co nejvíce nulových derivací v počátku (pro $\omega \to 0$), o čemž se přesvědčíme MacLaurinovým rozvojem v tomto bodě (ovšem jen za předpokladu, že funkce nemá v tomto bodě pól).

Absolutní hodnotu $|F|$ dostaneme násobením funkce F funkcí komplexně sdruženou $\bar{F}$ a odmocněním:

$$F = \sqrt{F \cdot \bar{F}} ,$$

kde

$$F = F_{(j\omega)} , \quad \bar{F} = F(-j\omega) .$$

Protože platí pro $|F|^2$ obdobný vztah jako pro $|F|$ použijeme přímo dvojmoci, aby odpadly obtížné operace s odmocninou.

Dosadíme-li výsledky z MacLaurinova rozvoje

$$|F|^2 = |F_{(0)}|^2 + |F_{(0)}|^{2'} \omega + \frac{1}{2!} |F_{(0)}|^{2''} \ldots$$

do vzorce (9), dostaneme, že

$$|F_{(0)}|^{2'} \omega + \frac{1}{2!} |F_{(0)}|^{2''} \omega^2 + \frac{1}{3!} |F_{(0)}|^{2'''} \omega^3 \ldots \xrightarrow{!} 0 \,. \tag{10}$$

Protože $|F|^2$ je sudá funkce, jsou všechny liché derivace identicky nulové a výraz (10) přejde na

$$\frac{1}{2!} |F_{(0)}|^{2''} \omega^2 + \frac{1}{4!} |F_{(0)}|^{2\mathrm{IV}} \omega^4 \ldots \xrightarrow{!} 0 \,. \tag{11}$$

Abychom se přiblížili tomuto požadavku, musí mít co nejvíce derivací nulovou hodnotu, jak již bylo řečeno.

Protože tyto derivace jsou funkcí konstant obvodu, obsahují též n hledaných parametrů regulátoru. Ty pak musí mít takovou hodnotu, aby platila podmínka nulové velikosti prvních n sudých derivací. Problém se tím převede na řešení algebraických rovnic.

To znamená, že musíme funkci F, která má tvar zlomku, násobit funkcí k ní komplexně sdruženou $\bar{F}$, abychom vypočítali dvojmoc její absolutní hodnoty, a tu potom $2n$-krát derivovat.

To je však zdlouhavá práce, proto si ukážeme, jak se dá výpočet zjednodušit na základě některých vlastností methody i vyšetřované funkce.

7.3. Zjednodušení výpočtu

Máme-li již k disposici dvojmoc absolutní hodnoty funkce F ve tvaru

$$|F|^2 = \frac{|A|^2}{|B|^2} , \tag{12}$$

nemusíme ji za daných okolností derivovat jako zlomek, ale postačí, když zderivujeme čitatele a jmenovatele zvlášť a místo podmínky

$$\{|F|^2\}^{(k)}_{(\omega=0)} \overset{!}{=} 0 \quad (k = 2, 4, 6, \ldots, 2n) \tag{13}$$

zavedeme podmínku

$$\left[\frac{\{|A|^2\}^{(k)}}{\{|B|^2\}^{(k)}} \overset{!}{=} |F|^2\right]_{(\omega=0)} \quad (k = 2, 4, 6, \ldots, 2n)\,. \tag{14}$$

Důkaz. Stanovíme-li podmínku (13) pro k-tou derivaci a dosadíme-li do ní výsledky z téže podmínky pro všechny předešlé derivace, přejde vztah (13) na ekvivalentní výraz (14):

$$\left[\{|F|^2\}^{(1)} = \frac{\{|A|^2\}^{(1)}|B|^2 - |A|^2\{|B|^2\}^{(1)}}{|B|^4}\right]_{\omega=0} = 0\,.$$

Z toho:

$$\left[\frac{\{|A|^2\}^{(1)}}{\{|B|^2\}^{(1)}} = \frac{|A|^2}{|B|^2}\right]_{(\omega=0)}. \tag{15}$$

Napíšeme-li podmínku pro další derivaci a dosadíme-li výsledek ze vzorce (15), dostaneme:

$$\frac{\{|A|^2\}^{(2)}}{\{|B|^2\}^{(2)}} \overset{!}{=} \frac{|A|^2}{|B|^2}\,.$$

Pokračujeme-li takto postupně dále, dostaneme obecně vztah (14).

Tento výraz se dá ještě zjednodušit tím, že vhodným způsobem obejdeme výpočet dvojmoci absolutních hodnot a vyjádříme si přímo jejich derivace. Protože

$$|A|^2 = A\bar{A} = A(\mathrm{j}\omega)\,A(-\mathrm{j}\omega)$$

(podobně pro $|B|^2$), bude m-tá derivace

$$\{|A|^2\}^{(m)} = \{A\bar{A}\}^{(m)}\,. \tag{17}$$

Použitím Leibnitzova vzorce pro derivaci součinu dostaneme:

$$\{|A|^2\}^{(m)}_{(\omega=0)} = \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} A^{(m-k)}\bar{A}^{(k)}\right]_{(\omega=0)} \tag{18}$$

Abychom však nemuseli zbytečně počítat ani derivace komplexně sdružených funkcí $\bar{A}$ a $\bar{B}$, vyjádříme si je pomocí daných funkcí A a B.

K tomu můžeme použít opět MacLaurinovy řady:

$$A = A_{(0)} + A'_{(0)}\,\mathrm{j}\omega + A''_{(0)}\frac{(\mathrm{j}\omega)^2}{2!} \ldots + A^{(m)}_{(0)}\frac{(\mathrm{j}\omega)^m}{m!}\,, \tag{19}$$

$$\bar{A} = \bar{A}_{(0)} + \bar{A}'_{(0)}(-\mathrm{j}\omega) + \bar{A}''_{(0)}\frac{(-\mathrm{j}\omega)^2}{2!} \ldots + \bar{A}^{(m)}\frac{(-\mathrm{j}\omega)^m}{m!}\,. \tag{20}$$

Porovnáním výrazů (19) a (20) zjistíme, že obecně

$$\bar{A}^{(m)}_{(0)} = (-1)^m A^{(m)}_0\,, \tag{21}$$

tedy sudé derivace se rovnají, liché mají jen opačné znaménko.

Tentýž výsledek potvrzuje i základní definice Fourierovy transformace:

$$A = \int_0^\infty A(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\,, \tag{22}$$

$$\bar{A} = \int_0^\infty A(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{23}$$

Derivujeme-li (22) a (23) pak pro $\omega = 0$ najdeme stejný vztah jako (21).

Po dosazení (21) do (18) dostaneme:

$$\{|A|^2\}^{(m)}_{(\omega=0)} = \left[\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} A^{(m-k)}A^{(k)}\right]_{(\omega=0)}. \tag{24}$$

Podmínka optima (14) proto bude mít tento konečný tvar:

$$\left[\frac{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}A^{(m-k)}A^{(k)}}{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}B^{(m-k)}B^{(k)}} \overset{!}{=} \frac{|A|^2}{|B|^2}\right]_{(\omega=0)} \tag{25}$$

($m = 2, 4, 6, \ldots, 2n$), (n = počet volitelných konstant).

Máme-li tedy n volitelných konstant regulačního obvodu, postačí k výpočtu jejich optimálních hodnot znalost frekvenční charakteristiky a vzorce (25).

Uvedené methody můžeme použít i u lineárních impulsových regulací, u servomechanismů a zesilovačů se zpětnou vazbou, a to i tehdy, je-li frekvenční charakteristika dána experimentálně, a dá-li se nahradit analytickým výrazem.

Některé příklady přispějí k vysvětlení této methody.

Příklad 1. Mějme regulovanou soustavu n-tého řádu $S = \dfrac{1}{(p\tau + 1)^n}$ (všechny časové konstanty stejné, pro regulaci nejnepříznivější případ) a regulátor proporcionálně integrační

$$R = P + \frac{1}{pI} = \frac{pPI + 1}{pI}$$

(kde P je proporcionální zesílení a I je integrační časová konstanta).

Přenos regulačního obvodu podle vzorce (5) bude:

$$F(p) = \frac{pPI + 1}{pI(p\tau + 1) + pPI + 1} .$$

Hledáme optimální hodnoty P a I.

K tomu potřebujeme dvě podmínky podle vzorce (25) (jednu pro $m = 2$ a druhou pro $m = 4$), tedy první čtyři derivace čitatele a jmenovatele funkce $F(p)$ pro $p = 0$.

(pro $p = 0$)

Derivace čitatele:		Derivace jmenovatele:	
nultá:	1	nultá:	1
první:	PI	první:	$I(1 + P)$
druhá:	0	druhá:	$2n\tau I$
třetí:	0	třetí:	$3\binom{n}{2}2!\,\tau^2 I$
čtvrtá:	0	čtvrtá:	$4\binom{n}{3}3!\,\tau^3 I$

Podmínky optima jsou (v. vz. (25)):

a) pro $m = 2$:

$$\frac{-2P^2I^2}{4n\tau I - 2I^2(1 + P)^2} \overset{!}{=} 1 ;$$

b) pro $m = 4$:

$$\frac{0}{8\binom{n}{3}3\,6\tau^3 I - 24\binom{n}{2}2\,\tau^2 I^2(1 + P) + 6\,.\,4n^2I^2\tau^2} \overset{!}{=} 1 .$$

Po úpravě:

a)

$$I = \frac{2n\tau}{1 + 2P} ;$$

b)

$$\frac{(n - 1)(n - 2)\,\tau}{3[P(n - 1) - 1]} .$$

Řešením těchto dvou rovnic dostaneme:

$$P = \frac{n + 2}{4(n - 1)} , \qquad I = \tfrac{4}{3}(n - 1)\,\tau .$$

Abychom se přesvědčili, zda tyto výsledky jsou použitelné i pro n značně větší než je počet volitelných podmínek, provedeme si kontrolu stability:

Je-li $n \gg 2$, bude $P \to \tfrac{1}{4}$.

Dosadíme-li tyto hodnoty do přenosu rozpojeného regulačního obvodu

$$RS = \frac{pPI + 1}{pI(p\tau + 1)^n} ,$$

bude jeho absolutní velikost

$$|RS| \to \left| \frac{1}{4(p\tau + 1)^n} \right| < 1 .$$

Protože tato hodnota je značně menší než jednička, je soustava stabilní (i přesto, že stejná velikost všech časových konstant činí soustavu nejméně způsobilou ke kvalitní regulaci). Můžeme se tedy domnívat, že správný výsledek dostaneme i v jiných případech, což potvrzuje i další příklad.

Příklad 2. Mějme regulovat soustavu nultého řádu s dopravním zpožděním proporcionálním regulátorem. Víme, že je to prakticky nemožné, protože regulační pochod je vždy kmitavý, a nestabilita nastává již při jednotkovém zesílení.

Přenos regulační soustavy podle vzorce (5) je:

$$F(p) = \frac{Pe^{-pT_d}}{1 + Pe^{-pT_d}}$$

Podmínka optima je:

$$\frac{0}{2T_d^2(1 + P) - 2T_d^2} \overset{!}{=} \frac{P^2}{(1 + P)^2} .$$

Tedy:

$$2T_d^2(1 + P) - 2T_d^2 \overset{!}{=} 0$$

a z toho:

$$P \overset{!}{=} 0 ,$$

což vyplývá i z logické úvahy.

Příklad 3. Soustava prvního řádu s dopravním zpožděním

$$S = \frac{e^{-pT_d}}{p\tau + 1}$$

a proporcionálně integrační regulátor

$$R = \frac{pPI + 1}{pI} .$$

Přenos podle (5):

$$F(p) = \frac{pPI + 1}{pI(p\tau + 1)\,e^{pT_d} + pPI + 1} .$$

Podmínky optima:

a)

$$\frac{-2P^2I^2}{4I(T_d + \tau) - 2I^2(1 + P)^2} \overset{!}{=} 1 ,$$

b)

$$\frac{0}{8IT_d^2(T_d + 3\tau) - 24I^2T_d(T_d + 2\tau)(1 + P) + 24I^2(T_d + \tau)^2} \overset{!}{=} 1 .$$

Další úpravou a po zavedení poměrných veličin, vztažených k časové konstantě τ, obdržíme:

a)

$$i(1 + 2P) - 2(d + 1) \stackrel{!}{=} 0\,,$$

b)

$$d^2(d + 3) - 3id(d + 2)(1 + P) + 3i(d + 1)^2 \stackrel{!}{=} 0\,,$$

kde $d = \frac{T\tau}{\tau}$ je poměrné dopravní zpoždění, $i = \frac{I}{\tau}$.

Výsledky řešení těchto rovnic jsou na obr. 1.

Příklad 4. Soustava stejná jako v předešlém příkladě, regulátor PID s přenosem

$$R = \frac{p^2DI + pPI + 1}{pI}\,,$$

kde D je derivační časová konstanta.

Přenos podle vzorce (5):

$$F = \frac{p^2DI + pPI + 1}{e^{p\tau d}pI(p\tau + 1) + p^2DI + pPI + 1}\,.$$

Výsledky, získané obdobně jako v předešlých příkladech, ukazuje obr. 2.

Porovnáním obr. 1 a 2 zjistíme, že přidání derivační složky poněkud zlepšilo regulaci, protože umožňuje celkově větší zesílení regulátoru (větší P a menší I).

Je nutno upozornit, že soustava s dopravním zpožděním nesplňuje zmíněnou Bodeho podmínku jednoznačné závislosti fáze a absolutní hodnoty frekvenční charakteristiky, proto se může stát, že pro větší hodnoty vypočítané derivační konstanty bude regulace nestabilní u vyšších frekvencí. U běžných soustav bez dopravního zpoždění stačí zabránit možným oscilacím u nejnižších frekvencí, aby bylo zaručeno, že kmity nenastanou ani u vyšších. (Zesílení pro vyšší kmitočty klesá.) Oblast hodnoty $\delta = \frac{D}{\tau}$, zakreslená v obr. 2 však dává stabilní regulační pochod.

Na servomechanismus můžeme aplikovat výpočet beze změn, protože přenosová funkce

$$F = \frac{RS}{1 + RS}$$

je obdobná přenosu servomechanismů.

Máme-li servomechanismus s přenosem n-tého stupně a $n - 1$ volitelnými konstantami, obdržíme výsledky, které jsou u servomechanismů prvního typu úplně shodné s Whiteleyho standardními tvary (viz práci [2] v seznamu literatury).

7.4. Závěr

Z uvedených příkladů (a zvláště z prvního) je zřejmé, že výsledky, které jsme získali, odpovídají dosti přísným požadavkům kvality přechodných průběhů, neboť je dovoleno poměrně malé zesílení, které je značně menší než kritické. To potvrdily i jiné příklady, které tu nejsou uvedeny. Protože výsledky jsou úplně obecné a jejich získání je velmi snadné, znamená tento způsob výpočtu značné ulehčení práce při návrhu regulací.

7.5. Dodatek

Podnět k této práci byl dán článkem [1], kde je optimum odvozeno jiným způsobem. Jeho autor, H. Sartorius, vychází z podmínky monotonnosti frekvenčního spektra regulační odchylky, v němž uvažuje i tvar i místo poruchy. Za předpokladu, že je tato podmínka splněna, se domnívá, že může použít jako kriteria kvality regulace lineární regulační plochy, protože regulační pochod není kmitavý. (Není to sice vždy pravda, ale tlumení je dobré, takže lze tuto okolnost připustit.)

Je vyšetřováno frekvenční spektrum (dvojmoc absolutní hodnoty Fourierovy transformace) regulační odchylky, které se obecně může napsat ve tvaru:

$$J(\omega^2) = \frac{Z(\omega^2)}{N(\omega^2)} = \frac{B_n\omega^{2n} + B_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots B_0}{A_m\omega^{2m} + A_{m-1}\omega^{2(m-1)} \dots A_0}\,.$$

Podmínkou monotonnosti této funkce je, aby

$$\frac{B_0}{A_0} \geqq \frac{B_\mu}{A_\mu} \quad \text{tedy} \quad J_{(0)} \geqq \frac{B_\mu}{A_\mu}$$

kde B_μ a A_μ jsou koeficienty u stejné mocniny frekvence ω. $J_{(0)}$ je dvojmoc lineární regulační plochy.

Dále je užito vztahu mezi funkcí J a jejími sudými derivacemi v bodě $\omega = 0$:

$$Z_0 = J_{(0)}N_{(0)}\,,$$
$$Z''_{(0)} = J''_{(0)}N_{(0)} + 2J'_{(0)}N'_{(0)} + J_{(0)}N''_{(0)}\,,$$
$$J_{(0)} = \frac{Z''_{(0)}}{N''_{(0)}} - \frac{N_{(0)}}{N''_{(0)}}J''_{(0)}\,. \tag{28}$$

Protože

$$\frac{Z''_{(0)}}{N''_{(0)}} = \frac{B_2}{A_2}\,,$$

bude

$$J_0 = \frac{B_2}{A} - \frac{A_0}{A}J''_{(0)} \tag{29}$$

Dosazením (29) do (27) obdržíme:

$$\frac{B_2}{A_2} - \frac{A_0}{A_2} J''_{(0)} \geqq \frac{A_2}{B_2} . \tag{30}$$

Tento vztah je splněn jen pro

$$J''_{(0)} \leqq 0 ,$$

$J_{(0)}$ bude mít minimum pro $J''_{(0)} = 0$, jak je vidět z výrazu (30). Pro $J''_{(0)} < 0$, $J_{(0)}$ roste, pro $J''_{(0)} > 0$ není možné vyhovět požadavkům (27) a (30).

První podmínkou optima bude tedy

$$J''_{(0)} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{B_2}{A_2} \stackrel{!}{=} \frac{B_0}{A_0} .$$

Podobným způsobem lze odvodit ze vztahů $J_{(0)}$ s jejími vyššími derivacemi:

$$J^{(2\mu)}_{(0)} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{B_\mu}{A_\mu} \stackrel{!}{=} \frac{B_0}{A_0} ,$$

$$(\mu = 1, 2, 3, \ldots, m) .$$

Jak vidíme, je to stejná podmínka, jaká byla odvozena v této práci, jenže obecnější, protože počítá nejen s vlastnostmi regulačního obvodu, ale i s poruchami.

Podle charakteru poruchy se řídí nastavení parametrů regulátoru.

Na př. při poruchách s povlovným náběhem není nebezpečí velikého přeregulování, i když sám regulační obvod má sklony ke kmitání, protože složky spektra poruchy, jejichž frekvence se blíží resonanční frekvenci obvodu, jsou malé. V tomto případě si můžeme dovolit větší zesílení a tím dosáhnout zmenšení regulační plochy.

Podmínka pro minimum frekvenčního spektra v bodě $\omega = 0$ není pouze podmínkou pro minimum lineární regulační plochy ($J_{(0)}$ je dvojmoc této plochy), neboť platí přibližně i pro minimum kvadratické plochy, vázané ovšem tím, že frekvenční spektrum nesmí mít vrchol převyšující hodnotu v jeho počátku.

Zvyšujeme-li totiž zesílení, klesá sice $J_{(0)}$, a tím i regulační plocha (i kvadratická), ale zmenšuje se též tlumení, a může se objevit resonanční vrchol. Pro dosažení minima plochy by bylo možno zesílení ještě poněkud zvětšit, avšak požadavek, aby nebyl resonanční vrchol, tomu brání. Tento požadavek je tedy rozhodující. Aby tedy spektrum odchylky nemělo nežádoucí vrchol, nesmí od počátku s rostoucí frekvencí vzrůstat — musí být pokud možno konstantní. Tomu odpovídají nulové derivace v počátku.

Při výpočtu optima tímto způsobem narážíme často na nutnost řešení algebraických rovnic řádu vyššího než druhého (na př. u PID regulátoru a soustavy s dopravním zpožděním). Ve speciálním případě, odvozeném autorem tohoto článku, se tato nesnáz obchází tím, že je vyšetřována jen frekvenční charakteristika samotného regulačního obvodu bez ohledu na tvar poruchy (tedy vlastně pro poruchu tvaru jednotkového impulsu na výstupu soustavy, což je nejméně příznivé pro regulaci), při čemž bylo možno zavésti přibližné vztahy 3 + 9. Podrobnějším rozborem se dá ukázat, že tato přibližnost má za následek, že se ve výpočtech vyskytují algebraické rovnice nejvýše druhého stupně (na př. případ na obr. 2 a 3 vedl jen k řešení lineárních rovnic). Výsledky získané tímto způsobem platí sice pro přísnější podmínky pro kvalitu regulace, ale to snad nemůže být na závadu, zejména ne u případů, kde máme k disposici jen málo volitelných konstant ve srovnání s řádem soustavy.

Literatura

[1] H. Sartorius, Angepasste Regelsysteme. Regelungstechnik 2, 1954.

[2] A. L. Whiteley, Theory of servo systems, with particular reference to stabilizations. Journ. of the Inst. of Electr. Eng., vol. 93, part II, 1946.

Obr. 1.
Obr. 2.

8. JEDNODUCHÁ NUMERICKÁ METHODA PRO VÝPOČET ODEZEV REGULAČNÍCH OBVODŮ

Ing. VÁCLAV PETERKA

Vysoká škola železniční, Praha

8.1 Úvod

Při návrhu regulace nejrůznějších zařízení bývá často třeba alespoň přibližně znát chování soustavy při působení rušivých vlivů. Jelikož časový průběh rušivé veličiny (vstupu) může být nejrůznějšího tvaru, vyšetřuje se zpravidla odezva regulační soustavy v případě nejnepříznivějším, t. j. při změně vstupu skokem, nebo se vyšetřuje odezva na jednotkový impuls. Chování regulační soustavy popisuje soustava integrodiferenciálních rovnic, které ve většině případů spojité regulace lze pro malé výchylky linearisovat. Eliminací veličin, které nás nezajímají, získáme lineární diferenciální rovnici, která určuje závislost výstupu regulačního obvodu na jeho vstupu (časového průběhu regulované veličiny na průběhu rušivé veličiny).

K analytickému řešení takovéto diferenciální rovnice je třeba určit kořeny její charakteristické rovnice, což činí obtíže u rovnic vysokých stupňů. Moderní operátorové methody řešení lineární diferenciální rovnice značně urychlí, zejména snadným zavedením počátečních podmínek, avšak nutnost stanovení kořenů charakteristické rovnice neodstraní. Proto byla vedle diferenciálních analysátorů, analogonů a jiných počítacích pomůcek, které nemá praktik vždy po ruce, vypracována řada method, které nevyžadují znalost kořenů charakteristické rovnice. U těchto moderních výpočtových method můžeme pozorovat v dosavadním vývoji dva hlavní směry.

První skupina těchto method využívá souvislosti mezi odezvou a frekvenční charakteristikou (nebo zobecnělou frekvenční charakteristikou). Patří sem na př. methoda SOLODOVNIKOVOVA [1], FLOYDOVA [2] a LEONHARDOVA [3, 4].

Druhý směr tvoří methody, které vycházejí z nahrazení časových funkcí řadou impulsů různých tvarů. Z těchto method uveďme alespoň methodu TUSTINOVU [5] a v poslední době publikovanou methodu BOXERA a THALERA [6].

Methody prvé skupiny jsou většinou graficko-numerické nebo používají i mechanických pomůcek, kdežto methody druhé skupiny jsou čistě numerické. K nevýhodám druhé skupiny patří, že k porozumění těchto method je třeba vyšších theoretických znalostí, takže stěží mohou nalézt uplatnění v širokém okruhu zájemců z praxe. Naproti tomu methody vycházející z frekvenční charakteristiky jsou dobře srozumitelné, avšak jenom vynesení frekvenční charakteristiky, které je většinou třeba provádět bod po bodu, zabere mnoho času, takže praktik často od výpočtu raději upustí.

Z těchto důvodů jsme se na katedře strojní mechaniky Vysoké školy železniční z popudu doc. Ing. Dr Nekolného zabývali hledáním jiných numerických method, které by byly jednoduché a rychle vedly k cíli. Jedním z výsledků této snahy je předkládaná práce.

Uváděná methoda předpokládá znalost jenom několika základních pravidel operátorového počtu, založeného na Laplaceově transformaci, který je v theorii samočinné regulace běžně používán. Spočívá na numerickém řešení integrální rovnice Volterrovy druhého typu, na kterou lze diferenciální rovnici přechodového procesu vždy převésti. Při tom k vyčíslení integrálu v ní se vyskytujícího (konvolutorního integrálu) je použito všeobecně známého lichoběžníkového pravidla. To umožňuje upravit numerické vyčíslení průběhu odezvy do přehledné tabulky, kterou stačí mechanicky vyplnit. Postup při praktickém výpočtu je zřejmý z připojených příkladů.

8.2. Numerický výpočet odezvy regulačního obvodu, je-li dán jeho přenos v operátorovém tvaru

Vyjádříme-li z transformované diferenciální rovnice (resp. soustavy takových rovnic) popisující chování regulační soustavy, obraz výstupu $Y(p)$, obdržíme pro případ, že byla soustava na počátku v klidu:

$$Y(p) = D(p)\, X(p)\,,$$

kde $X(p)$ je obraz vstupu (rozruchové funkce) a výraz $D(p)$ označujeme jako přenos regulačního obvodu mezi vstupem a výstupem. Výraz pro obraz výstupu lze vždy upravit do tvaru

$$Y(p) = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}\,, \tag{1}$$

kde $U(p)$ a $Z(p)$ jsou funkce komplexní proměnné p, u kterých známe póly, takže můžeme postupem v operátorovém počtu obvyklým nalézt jim příslušné originály. Funkce $U(p)$ a $Z(p)$ nejsou dány jednoznačně a jejich výběr lze provésti různě, jak si ukážeme dále.

Na možnost takovéto úpravy Laplaceova obrazu odezvy ukazuje prof. BLOCH ve svém příspěvku do sborníku vědeckých prací Moskevského inženýrsko-fysikálního institutu [7] a využívá ji k přibližnému řešení odezvy tak, že provede ve vztahu (1) naznačené dělení a dostane nekonečnou řadu

$$Y(p) = U(p) - U(p)\,Z(p) + U(p)\,Z^2(p) - \dots \tag{2}$$

Jelikož známe póly funkcí $U(p)$ a $Z(p)$, známe i póly všech členů řady (2) a můžeme k nim snadno nalézt originály

$$y(t) = u(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots \tag{3}$$

Důkaz konvergence řady funkcí (3) provádí prof. Bloch tak, že celou rovnici (1) násobí jmenovatelem pravé strany a jednoduchou úpravou obdrží vztah

$$Y(p) = U(p) - Z(p)\,Y(p).$$

Součinu obrazů na pravé straně odpovídá konvoluce jejich originálů, takže můžeme psát

$$y(t) = u(t) - \int_0^t z(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\,, \tag{4}$$

kde $y(t)$, $u(t)$ a $z(t)$ jsou originály k obrazům $Y(p)$, $U(p)$ a $Z(p)$.

Tímto způsobem obdržíme Volterrovu integrální rovnici druhého typu, o které je známo, že rozvedena v řadu (3) konverguje pro libovolné konečné t. Je zřejmé, že tato přibližná methoda výpočtu odezvy regulačního obvodu pomocí řady funkcí (3) je jen tehdy použitelná, můžeme-li se omezit jen na několik málo členů této řady. Závěrem svého článku prof. Bloch poznamenává, že to lze učinit zdaleka nevždy a že zejména pro soustavy s velkým koeficientem zesílení by bylo třeba provést vhodný výběr funkcí $U(p)$ a $Z(p)$, aby bylo dosaženo potřebné přesnosti při malém počtu členů řady.

Opustíme myšlenku přibližného výpočtu odezvy regulačního obvodu pomocí řady funkcí (3) a [illegible] rovnice (4), které prof. Bloch užívá pouze k důkazu [illegible] nejprve jen konvolutorní integrál

$$[illegible]$$

na pravé straně rovnice (4) a nalezněme přibližný výraz pro jeho hodnotu pomocí lichoběžníkového pravidla. Za tím účelem předpokládejme na chvíli, že známe průběh odezvy $y(t)$ a že má na př. tvar podle obr. 1. Funkce $z(t)$ nechť má průběh podle obr. 2.

Obr. 1.

Obr. 2.

Abychom rozlišili proměnnou, podle které integraci provádíme, a horní mez integrálu, zavádíme označení τ pro čas, který můžeme nazvat „uplynulým" na rozdíl od času t, „právě probíhajícího". Názornou představu o hodnotě integrálu I získáme tím, že oba průběhy z obr. 1 a 2 nakreslíme nad sebe tak, že jeden z nich, na př. $z(\tau)$, kreslíme jako zrcadlový obraz vzhledem k ose pořadnic a počátky obou průběhů posuneme od sebe o vzdálenost odpovídající času právě uvažovaného okamžiku (obr. 3). Hodnota konvolutorního integrálu I je pak určena plochou pod křivkou, jejíž pořadnice jsou dány součinem pořadnic z a y na téže vertikále. Rozdělíme časový interval t na k přiměřeně malých dílků Δ a plochu odpovídající konvolutornímu integrálu nahradíme součtem ploch lichoběžníků tvořených pořadnicemi křivky po úsecích Δ. Postup je zřejmý z obr. 3. Pořadnice funkcí $z(\tau)$ a $y(\tau)$ po intervalech Δ označujeme indexy tak,

Obr. 3.

jak za sebou následují od počátku. Konvolutorní integrál můžeme podle toho vyjádřit přibližným výrazem

$$I = (\tfrac{1}{2}y_0z_k + y_1z_{k-1} + y_2z_{k-2} + \dots + y_{k-1}z_1 + \tfrac{1}{2}y_kz_0)\,\Delta =$$
$$= \frac{y_0}{2}z_k\Delta + y_k\frac{z_0\Delta}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} y_iz_{k-i}\Delta \quad \text{pro} \quad k \geqq 1\,, \tag{5}$$
$$I = 0 \dots \text{pro } k = 0\,.$$

Uvažujeme-li hodnoty funkcí po intervalech Δ, můžeme Volterrovu integrální rovnici (4) nahradit přibližným vztahem

$$y_k = u_k - \frac{y_0}{2}z_k\Delta - y_k\frac{z_0\Delta}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} y_iz_{k-i}\Delta\,.$$

Jednoduchou úpravou získáme

$$y_k\left(1 + \frac{z_0\Delta}{2}\right) = u_k - \frac{y_0}{2}z_k\Delta - \sum_{i=1}^{k-1} y_iz_{k-i}\Delta$$

a označíme-li

$$1 + \frac{1}{\frac{z_0\Delta}{2}} = \varkappa\,; \quad u_k\varkappa = \bar{u}_k\,; \quad z_k\Delta\varkappa = \bar{z}_k\,, \tag{6}$$

můžeme psát

$$y_k = \bar{u}_k - \frac{y_0}{2}\bar{z}_k - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\bar{z}_{k-i} \;\dots\dots\dots\; k \geqq 1\,, \tag{7}$$

$y_0 = u_0$ (bez pruhu).

Tak dostáváme rekurentní relaci, která nám umožňuje určení hodnoty odezvy y_k ze známé předchozí hodnoty y_{k-1}. Potřebné hodnoty funkcí $u(t)$ a $z(t)$ vyčíslíme postupem v operátorovém počtu obvyklým, neboť póly jejich obrazů jsou známé.

O tom, jak je relace (7) vhodná pro vyčíslení průběhu odezvy, se přesvědčíme, rozvedeme-li ji podle k.

$$y_0 = u_0\,,$$
$$y_1 = \bar{u}_1 - \frac{y_0}{2}\bar{z}_1\,,$$
$$y_2 = \bar{u}_2 - \frac{y_0}{2}\bar{z}_2 - y_1\bar{z}_1\,,$$
$$y_3 = \bar{u}_3 - \frac{y_0}{2}\bar{z}_3 - y_1\bar{z}_2 - y_2\bar{z}_1\,,$$
$$y_4 = \bar{u}_4 - \frac{y_0}{2}\bar{z}_4 - y_1\bar{z}_3 - y_2\bar{z}_2 - y_3\bar{z}_1\,,$$

atd.

Vidíme, že tak dostáváme velmi vhodnou šablonu pro postupné vyčíslení bodů odezvy.

Při výpočtu můžeme postupovat přehledně podle tabulky 1. Hodnoty u_0, $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ atd., až do času, do kterého chceme odezvu sledovat, vypíšeme do prvého sloupce za silnější svislou čarou. Hodnoty z_1, $\bar{z}_2$, z_3 atd. vypíšeme nalevo od silné čáry avšak o řádek výše. Hodnota u_0 je zároveň hodnotou y_0 a přepíšeme ji proto nad další volný sloupec. Záporně vzatou polovinou této hodnoty pronásobíme hodnoty $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, z_3 atd. a výsledky tohoto násobení píšeme do sloupce pod hodnotu y_0, počínaje řádkem o jeden nižším, než je u_0, tak jako bychom hodnoty $\bar{z}_{1,2,3,\dots}$ posunuli řádkem o jeden nižším, než je u_0, tak jako bychom hodnoty $\bar{z}_{1,2,3,\dots}$ posunuli po úhlopříčce vpravo dolů. Sečteme řádek počínající $\bar{u}_1$ a výsledek y_1 napíšeme nad další volný sloupec. Pronásobíme hodnotou $-y_1$ všechna $\bar{z}$ a jednotlivé součiny píšeme do sloupce pod y_1 opět o řádek níže. Sečtením dalšího řádku dostáváme hodnotu y_2 a tak postupujeme stále dál. Na nejhořejší řádce se nám postupně řadí hodnoty hledané odezvy po časových intervalech Δ. Výpočet si usnadníme tím, že si hodnoty $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$ atd. vypíšeme na proužek papíru, kterým pak posouváme.

V mnoha praktických případech je $z_0 = 0$ a tudíž $\varkappa = 1$, takže redukci koeficientem $\varkappa$ není třeba provádět.

Tabulka 1.

$\bar{z}_1$		y_0	y_1	y_2	y_3	$y_4 \dots$
$\bar{z}_2$	u_0					
$\bar{z}_3$	$\bar{u}_1$	$-\frac{y_0}{2}\bar{z}_1$				
$\bar{z}_4$	$\bar{u}_2$	$-\frac{y_0}{2}\bar{z}_2$	$-y_1\bar{z}_1$			
⋮	$\bar{u}_3$	$-\frac{y_0}{2}\bar{z}_3$	$-y_1\bar{z}_2$	$-y_2\bar{z}_1$		
⋮	$\bar{u}_4$	$-\frac{y_0}{2}\bar{z}_4$	$-y_1\bar{z}_3$	$-y_2\bar{z}_2$	$-y_3\bar{z}_1$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Volba funkcí $U(p)$, $Z(p)$ a intervalu Δ.

V předchozím výkladu jsme si ukázali, jak lze diferenciální rovnici přechodového procesu lineární regulační soustavy převést na integrální rovnici Volterrovu druhého typu a jak lze tuto rovnici numericky řešit pomocí tabulky 1. Při tom jsme předpokládali Laplaceův obraz výstupu již upravený do tvaru

$$Y(p) = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}\,, \tag{1}$$

kde $U(p)$ a $Z(p)$ jsou funkce komplexní proměnné p, k nimž umíme jednoduše nalézt příslušné originály. Funkce $U(p)$ a $Z(p)$ je možno volit různě. Všimneme si zde jen dvou možností jejich volby, které se jeví s hlediska rychlosti výpočtu nejvýhodnější.

První z nich spočívá na tom, že přenos, resp. diferenciální rovnici přechodového procesu, která bývá často velmi vysokého řádu, získáváme eliminací proměnných ze soustavy diferenciálních rovnic popisujících chování jednotlivých členů soustavy. Pro jednoduchost a názornost výkladu ukážeme si postup na soustavě dvou simultánních diferenciálních rovnic, jež transformovány mají tvar

$$D_{11}X_1 + D_{21}X_2 = R_0\,,$$
$$D_{12}X_1 + D_{22}X_2 = R_2\,,$$

kde D jsou lineární diferenciální operátory typu $Ap^2 + Bp + C$, X obrazy neznámých funkcí a R jsou obrazy rozruchových funkcí (není-li soustava na počátku v klidu, jsou k nim zahrnuty i operátory počátečních podmínek). Kořeny operátorů D snadno určíme, neboť, popisují-li fysikální soustavu, bývají maximálně druhého řádu. Budiž na př. X_1 obrazem výstupu regulační soustavy, který vyšetřujeme. Řešení soustavy rovnic (6) podle této neznámé můžeme upravit do tvaru

$$X_1 = \frac{R_1D_{22} - D_{21}R_2}{D_{11}D_{22} - D_{21}D_{12}} = \frac{\dfrac{R_1D_{22} - D_{21}R_2}{D_{11}D_{22}}}{1 - \dfrac{D_{21}D_{12}}{D_{11}D_{22}}} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}\,,$$

kde jsme čitatele i jmenovatele dělili součinem operátorů $D_{11}D_{22}$ za předpokladu, že $D_{11}D_{22}$ je vyššího nebo maximálně stejného řádu jako $D_{21}D_{12}$. Kdyby tomu tak nebylo, provedli bychom dělení součinem operátorů $D_{21}D_{12}$.

U soustavy libovolného počtu simultánních diferenciálních rovnic bude postup stejný, jenom ve jmenovatelích funkcí $U(p)$ a $Z(p)$ se objeví součin většího počtu operátorů a v čitatelích se objeví další členy. Protože ve jmenovatelích obou výrazů $U(p)$ a $Z(p)$ jsou pouze součiny operátorů, jejichž kořeny známe, můžeme k nim snadno nalézt originály $u(t)$ a $z(t)$.

V podstatě týmž postupem lze provést úpravu obrazu výstupu, je-li dáno blokové schema regulačního obvodu s přenosy jednotlivých článků (viz připojený příklad 1 a 3).

Jiná možnost je, že obraz odezvy regulační soustavy upravíme do obvyklého tvaru

$$y(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + b_2p^{m-2} + \ldots + b_{m-1}p + b_m}{p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}\,, \; m < n\,. \tag{9}$$

Čitatele i jmenovatele tohoto výrazu dělíme p^n a obdržíme:

$$Y(p) = \frac{\dfrac{b_0}{p^{n-m}} + \dfrac{b_1}{p^{n-m+1}} + \dfrac{b_2}{p^{n-m+2}} + \ldots + \dfrac{b_{m-1}}{p^{n-1}} + \dfrac{b_m}{p^n}}{1 + \dfrac{a_1}{p} + \dfrac{a_2}{p^2} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \dfrac{a_n}{p^n}}\,.$$

Potom jest

$$U(p) = \frac{b_0}{p^{n-m}} + \frac{b_1}{p^{n-m+1}} + \frac{b_2}{p^{n-m+2}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{p^{n-1}} + \frac{b_m}{p^n}$$

$$Z(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_n}{p^n}\,,$$

a snadno nalezneme

$$u(t) = \frac{b_0}{(n-m-1)!}\,t^{n-m-1} + \frac{b_1}{(n-m)!}\,t^{n-m} + \ldots + \frac{b_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,, \tag{10}$$

$$z(t) = a_1 + a_2t + \frac{a_3}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,.$$

Přesto, že v tomto druhém případě je nalezení funkcí $u(t)$ a $z(t)$ velmi snadné (resp. je můžeme psát přímo), bývá první postup ve složitějších případech (jako je na př. příklad 3 dále uvedený) výhodnější, jelikož odpadá pronásobování operátorů D při úpravě přenosu do tvaru (9). Tato úprava je u složitějších soustav již sama o sobě dosti pracná, nehledě k tomu, že nemáme kontrolu, zda jsme při ní neudělali chybu. Jak dobře lze kontrolovati výpočet při prvním z uvedených postupů, je patrno z příkladu 3, kde je uveden výpočet odezvy regulačního obvodu, jejíž charakteristická rovnice je desátého stupně. Výhodou druhého postupu je, že k vyčíslení $u(t)$ a $z(t)$ není třeba tabulek.

Než přistoupíme k praktickým výpočtům, zmíníme se ještě několika slovy o volbě časového intervalu Δ. Čím menší je tento interval, tím přesnější bude řešení, avšak tím více roste objem číselných operací, které je třeba provésti k získání odezvy potřebné délky. Při praktickém výpočtu lze dobře postupovat tak, že interval Δ odhadneme podle fysikálního charakteru soustavy, vypočteme prvních několik hodnot u_k a z_k (většinou stačí 2 až 3 hodnoty) a dosazením do tabulky 1 získáme příslušné přibližné hodnoty odezvy. Podle jejich souslednosti vidíme, zda byl interval volen správně, či zda je ho třeba opravit. Jak dobré výsledky dává methoda i při poměrně velmi hrubém intervalu Δ, je patrno z následujících příkladů.

Příklady

Příklad 1. Hledáme na jednotkový impuls regulačního obvodu na obr. 4. Jde o soustavu 1. řádu regulovanou integračním regulátorem. Pro takovýto jednoduchý případ můžeme snadno nalézt i přesné řešení a porovnat je s výsledkem, který dává popsaná methoda.

Obr. 4.

Celkový přenos obvodu je

$$D(p) = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p)\,G_2(p)} = \frac{\dfrac{1}{1 + pT_1}}{1 + \dfrac{1}{T_2p(1 + pT_1)}}\,,$$

což jest již zároveň Laplaceův obraz odezvy na jednotkový impuls. Časové konstanty nechť jsou $T_1 = 1$ s, $T_2 = 2$ s.

$$Y(p) = \frac{\dfrac{1}{1 + p}}{1 + \dfrac{1}{2p(1 + p)}} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}$$

Snadno nalezneme

$$U(t) = e^{-t}\,, \quad z(t) = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-t})\,.$$

Interval volme 0,4 s. Pomocí tabulek e^x vyčíslíme:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_k	0,670	0,449	0,301	0,202	0,135	0,091	0,061	0,041	0,027	0,018	0,012	0,008
z_k	0,165	0,275	0,349	0,399	0,432	0,455	0,470	0,480	0,486	0,491	0,494	0,496

Jelikož $z_0 = 0$, jest $s_k = s_k$, $z_k = z_k$ a po dosazení do tabulky 1 obdržíme

0,066		1	0,637	0,352	0,138	−0,015	−0,016	−0,177	−0,205	−0,211	−0,201
0,110	1										
0,140	0,670	−0,033									
0,160	0,449	−0,055	−0,042								
0,173	0,301	−0,070	−0,076	−0,023							
0,182	0,202	−0,080	−0,089	−0,039	−0,009						
0,188	0,135	−0,087	−0,102	−0,049	−0,015	+0,001					
0,192	0,091	−0,091	−0,110	−0,056	−0,019	+0,002	+0,008				
0,195	0,061	−0,094	−0,116	−0,051	−0,022	+0,002	+0,013	+0,012			
0,196	0,041	−0,096	−0,126	−0,064	−0,024	+0,002	+0,016	+0,020	+0,014		
	0,027	−0,097	−0,122	−0,066	−0,025	+0,003	+0,019	+0,025	+0,023	+0,014	
	0,018	−0,098	−0,124	−0,068	−0,026	+0,003	+0,020	+0,028	+0,029	+0,023	+0,013

V obr. 5 křivka „*a*" představuje přesné řešení naší úlohy a hodnoty označené křížkem jsou námi získané pro interval $\Delta = 0{,}04$ s.

Obr. 5.

Abychom si ukázali, jak se volbou hrubšího intervalu Δ zmenší počet potřebných operací při zachování postačující přesnosti, opakujeme výpočet pro dvojnásobný interval $\Delta = 0{,}08$ s.

0,220		1	0,339	−0,033	−0,192	−0,222	−0,186
0,319	1						
0,364	0,449	−0,110					
0,384	0,202	−0,160	−0,075				
0,393	0,091	−0,182	−0,108	+0,007			
	0,041	−0,192	−0,123	+0,010	+0,042		
	0,018	−0,196	−0,130	+0,012	+0,061	+0,049	

Zkrácení výpočtu pro vyčíslení odezvy téže délky jako v předchozím případě je zřejmé. Výsledky jsou pro porovnání vyneseny do obr. 5 a označeny kroužkem.

Příklad 2. Vyšetřeme odezvu na jednotkový skok regulačního obvodu z předchozího příkladu a postupujeme při tom druhým ze způsobů výše uvedených.

Laplaceův obraz odezvy upravíme do tvaru (9)

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + p + 0{,}5} = \frac{\dfrac{1}{p^2}}{1 + \dfrac{1}{p} + \dfrac{0{,}5}{p}} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)} .$$

Ve shodě se vzorci (10) jest

$$u(t) = t ,$$
$$z(t) = 1 - 0{,}05t .$$

Jelikož funkce $z(t)$ má nenulovou počáteční hodnotu, je třeba provést redukci koeficientem $\varkappa$. Volíme-li interval $\Delta = 0{,}04$ s, bude

$$\bar{u}_k = \varkappa u_k = \varkappa\, \Delta k = \tfrac{1}{3}k ,$$
$$z_k = \varkappa\, \Delta(1 + 0{,}5\Delta k) = \tfrac{1}{3}(1 + 0{,}2k) .$$

Tyto výrazy snadno vyčíslíme a dosazením do tabulky 1 obdržíme:

0,400		0	0,333	0,534	0,630	0,655	0,626	0,560	0,488	0,404	0,317	0,241
0,467	0											
0,533	0,333	0										
0,600	0,667	0	−0,133									
0,667	1,000	0	−0,158	−0,214								
0,733	1,333	0	−0,177	−0,249	−0,252							
0,800	1,667	0	−0,200	−0,285	−0,294	−0,262						
0,867	2,000	0	−0,222	−0,320	−0,336	−0,306	−0,250					
0,933	2,333	0	−0,244	−0,356	−0,378	−0,349	−0,292	−0,226				
	2,667	0	−0,266	−0,391	−0,420	−0,393	−0,334	−0,264	−0,195			
	3,000	0	−0,289	−0,427	−0,462	−0,437	−0,376	−0,302	−0,228	−0,162		
	3,333	0	−0,311	−0,463	−0,504	−0,480	−0,418	−0,340	−0,260	−0,189	−0,127	

Křivka „*b*" v obr. 5. je přesným řešením příkladu a body označené křížkem jsou hodnoty námi získané.

Příklad 3. Jako příklad složitějšího případu uveďme vyšetření odezvy regulačního obvodu na obr. 6 na jednotkový skok. Jde o regulaci válcovací stolice a řešení bylo provedeno pro potřebu praxe. Úloha vede na diferenciální rovnici desátého řádu.

Obr. 6.
Obr. 7.

Nejprve upravíme schema do tvaru na obr. 7. Celý přenos obvodu jest

$$D(p) = \frac{G_1 \cdot G_3}{1 + G_1 \cdot G_3 + G_1 \cdot G_2} .$$

Obraz odezvy na jednotkový skok obdržíme jako součin obrazu vstupu $\dfrac{1}{p}$ a přenosu $D(p)$

$$Y(p) = D(p)\frac{1}{p} = \frac{\dfrac{1}{p}\, G_1 G_3}{1 + G_1 G_3 + G_1 G_2} = \frac{U(p)}{1 + Z(p)}$$

$$U(p) = \frac{1}{p} G_1 G_3 = \frac{26{,}264(0{,}37p + 1)}{p(0{,}48p + 1)(1{,}81p + 1)(6{,}05 \,.\, 10^{-3}p + 1)(0{,}0185p + 1)(4{,}7 10^{-3}p + 1)} \,.$$

$$Z(p) = \frac{26{,}264(0{,}37p + 1)}{(0{,}48p + 1)(1{,}81\,p + 1)(6{,}05 \,.\, 10^{-3}p + 1)(0{,}0185p + 1)(4{,}7 \,.\, 10^{-3}p + 1)} +$$
$$+ \frac{109{,}5(0{,}207p + 1)}{(0{,}48p + 1)(1{,}81p + 1)(6{,}05 \,.\, 10^{-3}p + 1)} \,.$$

Jelikož jmenovatele funkcí $U(p)$ a $Z(p)$ mámo již ve tvaru součinu jednoduchých dvojčlenů, můžeme přímo psát jejich Heavisideův rozvoj. Tak pro $u(t)$ platí

$$u(t) = C_0 + C_1 e^{-\frac{t}{0{,}48}} + C_2 e^{-\frac{t}{1{,}81}} + C_3 e^{-\frac{t}{6{,}05 . 10^{-3}}} + C_4 e^{-\frac{t}{0{,}0185}} + C_5 e^{-\frac{t}{4{,}7 . 10^{-3}}} \,.$$

Konstanty rozvoje určíme podle známých pravidel

$$C_0 = [pU(p)]_{p=0} = 26{,}264 \,,$$

$$C_1 = \frac{-26{,}264\left(-\dfrac{0{,}37}{0{,}48} + 1\right)}{\left(-\dfrac{1{,}81}{0{,}48} + 1\right)\left(-\dfrac{0{,}605 \,.\, 10^{-3}}{0{,}48} + 1\right)\left(-\dfrac{0{,}0185}{0{,}48} + 1\right)\left(-\dfrac{4{,}7 \,.\, 10^{-3}}{0{,}48} + 1\right)} = + 2{,}311$$

a podobně určíme další konstanty

$$C_2 = -28{,}901 \,, \quad C_3 = -0{,}148 \,, \quad C_4 = +0{,}412 \,, \quad C_5 = +0{,}062 \,.$$

Jelikož $u(0) = \lim_{\leftarrow p \to \infty}(pU(p))\ 0$, musí platit

$$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 0 \,.$$

Dosazením vypočtených konstant kontrolujeme, zda jsme při jejich výpočtu neudělali chybu:

$$26{,}264 + 2{,}311 - 28{,}901 - 0{,}148 + 0{,}412 + 0{,}062 = 0{,}000 \,.$$

Při rozvoji funkce $Z(p)$ využijeme toho, že první její část se až na činitel p ve jmenovatel shoduje s funkcí $U(p)$. Stačí tedy provést rozvoj jenom druhé části. Rozvoj první části je derivací $u(t)$.

$$z(t) = -\frac{C_1}{0{,}48} e^{-\frac{t}{0{,}48}} - \frac{C_2}{1{,}81} e^{-\frac{t}{1{,}81}} - \frac{C_3}{6{,}05 \,.\, 10^{-3}} e^{-\frac{t}{6{,}05 . 10^{-3}}} - \frac{C_4}{0{,}0185} e^{-\frac{t}{0{,}0185}} -$$
$$- \frac{C_5}{4{,}7 \,.\, 10^{-3}} e^{-\frac{t}{4{,}7 . 10^{-3}}} + C_6 e^{-\frac{t}{0{,}48}} + C_7 e^{-\frac{t}{1{,}81}} + C_8 e^{-\frac{t}{4{,}7 . 10^{-3}}}$$

$$C_6 = \frac{109{,}52\left(-\dfrac{0{,}207}{0{,}48} + 1\right)}{0{,}48\left(-\dfrac{1{,}81}{0{,}48} + 1\right)\left(-\dfrac{6{,}05 \,.\, 10^{-3}}{0{,}48} + 1\right)} = -47{,}43$$

a podobně dostaneme

$$C_7 = 73{,}17 \,, \quad C_8 = -25{,}74 \,.$$

Kontrolujeme:

$$\lim_{p \to \infty}(pZp) = 0 = C_6 + C_7 + C_8 \,,$$
$$-47{,}43 + 73{,}17 - 25{,}74 = 0{,}00 \,.$$

Shrnutím konstant obdržíme

$$z(t) = K_1 e^{-\frac{t}{0{,}48}} + K_2 e^{-\frac{t}{1{,}81}} + K_3 e^{-\frac{t}{6{,}05 . 10^{-3}}} + K_4 e^{-\frac{t}{0{,}0185}} + K_5 e^{-\frac{t}{4{,}7 . 10^{-3}}}$$

$$K_1 = -52{,}25 \,, \quad K_2 = +89{,}14 \,, \quad K_3 = -1{,}39 \,, \quad K_4 = -22{,}25 \,, \quad K_5 = -13{,}26 \,;$$

kontrola:

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 = -0{,}01 \doteq 0 \,.$$

Pro vyčíslení hodnot po intervalu Δ upravíme výrazy pro obě funkce do tvaru

$$u_k = C_0 + C_1\delta_1^k + C_2\delta_2^k + C_3\delta_3^k + C_4\delta_4^k + C_5\delta_5^k \,,$$
$$z_k = K_1\delta_1^k + K_2\delta_2^k + K_3\delta_3^k + K_4\delta_4^k + K_5\delta_5^k \,,$$

kde je

$$\delta_1 = e^{-\frac{\Delta}{0{,}41}} \,, \quad \delta_2 = e^{-\frac{\Delta}{1{,}81}} \,, \quad \delta_3 = e^{-\frac{\Delta}{6{,}05 . 10^{-3}}} \,, \quad \delta_4 = e^{-\frac{\Delta}{0{,}0185}} \,, \quad \delta_5 = e^{-\frac{\Delta}{4{,}7 . 10^{-3}}} \,.$$

Interval Δ byl nejprve odhadnut na 0,05 sec. Byly vyčísleny hodnoty u_1 u_2, U_3, z_1, z_2 a dosazeny do tab. 1. Z výsledků bylo patrno, že je interval příliš hrubý a proto byl opraven na hodnotu $\Delta = 0{,}02$ sec. Vyčíslení hodnot u_k a $\bar{z}_k = \Delta z_k$ pro tento

stroji). Kontrolu výpočtu provádíme tak, že sledujeme přírůstky funkcí $u(t)$ a $z(t)$. Vyčíslení tabulky 1 (viz str. [redacted]) bylo s výhodou provedeno na logaritmickém pravítku (vyčíslení celého sloupce pouhým posouváním jezdce). Získaná odezva je vynesena v grafu na obr. 8 (str. [redacted]).

Obr. 7.
Obr. 8.

Z výpočtu je patrno, že malé časové konstanty ovlivní pouze počáteční hodnoty funkcí $u(t)$ a $z(t)$ a tím též průběh odezvy nejvíce v náběhové části.

8.3. Regulační obvody s dopravním zpožděním

Popsanou methodou lze vyšetřovat i regulační obvody s dopravním zpožděním. Ukážeme si postup na typickém zapojení tohoto druhu znázorněním blokovým schematem na obr. 9. Takové schema může vzniknout zjednodušením

Obr. 9.

daleko složitějšího schematu třeba i s několika zpětnými vazbami, takže póly přenosů $W(p)$ a $V(p)$ obecně neznáme.

Přenos celého obvodu jest

$$D(p) = \frac{e^{-pT_d} W(p)}{1 + e^{-pT_d} W(p)\, V(p)} \,. \tag{11}$$

Neznáme-li póly funkcí $W(p)$ a $W(p)\,V(p)$, upravíme je do tvaru

$$W(p) = \frac{U_1(p)}{1 + Z_1(p)} \,, \quad W(p)\,V(p) = \frac{U_2(p)}{1 + Z_2(p)} \,, \tag{12}$$

Schema výpočtu

k	
δ_1^k K_1	$\Delta\delta_1^k$ $C_1\delta_1^k$
δ_2^k K_2	$\Delta\delta_2^k$ $C_2\delta_2^k$
δ_3^k K_3	$\Delta\delta_3^k$ $C_3\delta_3^k$
δ_4^k K_4	$\Delta\delta_4^k$ $C_4\delta_4^k$
δ_5^k K_5	$\Delta\delta_5^k$ $C_5\delta_5^k$
z_k	u_k

$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
0,95919 −1,002 + 2,216	0,92005 −0,961 + 2,126	0,88250 −0,922 + 2,039	0,84649 −0,885 + 1,956	0,81194 −0,848 + 1,876
0,98901 +1,763 −28,583	0,97814 +1,744 −28,269	0,96739 +1,725 −27,959	0,95676 +1,706 −27,651	0,94625 +1,687 −27,348
0,03667 −0,001 − 0,005	0,00134 — —	0,00005 — —	— — —	— — —
0,33923 −0,151 + 0,140	0,11508 −0,051 + 0,048	0,03904 −0,017 + 0,016	0,01324 −0,006 + 0,005	0,00449 −0,002 + 0,002
0,01419 −0,004 —	— — —	— — —	— — —	— — —
+0,606 − 0,032	+0,732 + 0,169	+0,786 + 0,360	+0,815 + 0,574	+0,837 + 0,794

$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
0,77880 −0,814 + 1,800	0,74702 −0,781 + 1,726	0,71653 −0,749 + 1,653	0,68729 −0,718 + 1,588	0,65924 −0,689 + 1,523
0,93585 +1,668 −27,047	0,92557 +1,650 +26,750	0,91540 +1,632 −26,456	0,90534 +1,614 −26,165	0,89539 +1,596 −25,878
0,00152 −0,001 + 0,001	0,00052 — —	— — —	— — —	— — —
+0,853 + 1,018	+0,869 + 1,240	+0,883 + 1,464	+0,896 + 1,687	+0,907 + 1,909

$k = 11$	$k = 12$	$k = 13$	$k = 14$	$k = 15$
0,63234 −0,661 + 1,461	0,60653 −0,634 + 1,402	0,58178 −0,608 + 1,344	0,55804 −0,583 + 1,290	0,53527 −0,559 + 1,237
0,88555 +1,579 −25,593	0,87582 +1,561 −25,312	0,86619 +1,544 −25,034	0,85667 +1,527 −24,759	0,84726 +1,510 −24,487
+0,918 + 2,132	+0,927 + 2,354	+0,936 + 2,574	+0,944 + 2,795	+0,951 + 2,014

$$u_k = C_0 + C_1\delta_1^k + C_2\delta_2^k + C_3\delta_3^k + C_4\delta_4^k + C_5\delta_5^k$$

$$z_k = K_1\delta_1^k + K_2\delta_2^k + K_3\delta_3^k + K_4\delta_4^k + K_5\delta_5^k$$

0,606		0	0,032	0,150	0,246	0,290	0,294	0,286	0,271	0,262	0,254	0,249	0,246	0,242	0,236	0,234	0,230
0,732	0																
0,786	0,032	0															
0,815	0,169	0	−0,019														
0,837	0,360	0	−0,023	−0,091													
0,853	0,574	0	−0,025	−0,110	−0,149												
0,869	0,794	0	−0,026	−0,118	−0,180	−0,176											
0,883	1,018	0	−0,027	−0,122	−0,193	−0,212	−0,178										
0,896	1,240	0	−0,027	−0,126	−0,200	−0,228	−0,215	−0,173									
0,907	1,464	0	−0,028	−0,128	−0,206	−0,236	−0,231	−0,209	−0,164								
0,918	1,687	0	−0,028	−0,130	−0,210	−0,243	−0,240	−0,225	−0,198	−0,159							
0,927	1,909	0	−0,029	−0,132	−0,214	−0,247	−0,246	−0,233	−0,213	−0,192	−0,154						
0,936	2,132	0	−0,029	−0,134	−0,217	−0,252	−0,251	−0,239	−0,221	−0,206	−0,186	−0,151					
0,944	2,354	0	−0,029	−0,136	−0,220	−0,256	−0,255	−0,244	−0,227	−0,214	−0,200	−0,182	−0,149				
	2,574	0	−0,030	−0,138	−0,223	−0,260	−0,259	−0,248	−0,231	−0,219	−0,207	−0,196	−0,180	−0,147			
	2,795	0	−0,030	−0,139	−0,226	−0,263	−0,263	−0,253	−0,235	−0,223	−0,213	−0,203	−0,193	−0,177	−0,143		
	3,014	0	−0,030	−0,140	−0,228	−0,266	−0,267	−0,256	−0,239	−0,228	−0,217	−0,208	−0,200	−0,190	−0,173	−0,142	

kde $U_0(p)$, $U_2(p)$, $Z_0(p)$ a $Z_2(p)$ jsou funkce, jejichž póly známe. Obraz výstupu obdržíme jako součin obrazu vstupu a přenosu $D(p)$. Po dosazení vztahů (12) do výrazů pro přenos obvodu (11) a jednoduché úpravě obdržíme

$$Y(p) = D(p)\,X(p) =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-pT_z}[U_1(p) + U_1(p)\,Z_2(p)]\,X(p)}{1 + Z_1(p) + Z_2(p) + Z_1(p)\,Z_2(p) + \mathrm{e}^{-pT_z}[U_2(p) + U_2(p)\,Z_1(p)]} =$$
$$= \frac{U(p)}{1 + Z(p)}\,.$$

Originály $u(t)$ a $z(t)$ k funkcím $U(p)$ a $Z(p)$ můžeme již snadno nalézti.

Z výrazu pro $Z(p)$ jest patrno, že funkce $z(t)$ obecně může být nespojitá jednak v počátku a jednak v čase $t = T_z$ (obr. 10). Funkce $u(t)$ a tím též $y(t)$ (plyne z rovnice (4)) může být nespojitá v čase $t = T_z$ a až do tohoto času je nulová (obr. 11).

Obr. 10.
Obr. 11.

Podrobnějším rozborem, který lze provésti na př. pomocí grafického znázornění podobného obr. 3, zjistíme, že i v tomto případě lze k vyčíslení odezvy použít tabulky 1, dodržíme-li těchto několik pravidel:

1. Interval Δ volíme tak, aby dopravní zpoždění bylo jeho celistvým násobkem.

2. Místo hodnoty $\bar{u}_z$ (v místě event. nespojitosti funkce $u(t)$) dosazujeme do tabulky 1 hodnotu $\bar{u}_{kp}$ (bez pruhu!).

3. Za hodnoty funkcí v místě eventuální nespojitosti $t = T_z$ dosazujeme střední hodnotu limit zleva a zprava

$$\left(\frac{y_{z1} + y_{zp}}{2} \quad \text{resp.} \quad \frac{y_{zp}}{2}\,, \quad \frac{z_{z1} + z_{zp}}{2}\right).$$

4. Při prvém objevení se ve výpočtu hodnoty z_z (v řádku pro $y(2T_z)$) dosazujeme za její hodnotu limitu zleva z_{z1}. (Toto pravidlo se uplatní jen pro $u_{zp} \neq 0$.)

Jinak je postup týž jako v případě obvodu bez dopravního zpoždění.

Příklad 4. Vyšetřeme odezvu obvodu na obr. 12 na jednotkový skok vstupu. Týž případ je řešen v lit. [2] přes frekvenční charakteristiku.

Celkový přenos obvodu je

$$D(p) = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-pT_z}}{1 + pT_1}}{1 + \mathrm{e}^{-pT_z}\dfrac{k}{1 + pT_1}}\,.$$

Obr. 12.

Konstanty obvodu jsou

$$T_z - 2sT_1 = 10\,\mathrm{s}\,, \quad k = 6{,}0\,.$$

Obraz hledané odezvy bude tedy:

$$Yp = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p(1 + 10p)}}{1 + \mathrm{e}^{-2p}\dfrac{6}{1 + 10p}} = \frac{Up}{1 + Zp}\,.$$

Originály k funkcím $U(p)$ a $Z(p)$

$u(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-2}{10}}$ pro $t > 2\,\mathrm{s}$; $u(t) = 0$ pro $t < 2s$

$z(t) = 0{,}6\,\mathrm{e}^{-\frac{t-2}{10}}$ pro $t > 2s$; $z(t) = 0$ pro $t < 2s$,

snadno vyčíslíme pomocí tabulek e^x. Interval volíme $\Delta = 1$ s. Dosazením do tabulky I při zachování výše uvedených pravidel obdržíme:

0,161		0	1,610	4,280	5,154	3,801	1,021	−1,852	−3,595	−5,618	−2,114	0,095
0,454	0											
0,657	1,610	0										
0,765	4,539	0	−0,259									
0,801	6,574	0	−0,751	−0,689								
0,798	7,653	0	−1,059	−1,943	−0,830							
0,772	8,014	0	−1,229	−2,813	−2,339	−0,612						
0,733	7,985	0	−1,291	−3,266	−3,388	−1,726	−0,164					
0,688	7,718	0	−1,286	−3,430	−3,934	−2,499	−0,463	+0,298				
0,641	7,525	0	−1,243	−5,416	−4,130	−2,901	−0,671	+0,841	+0,579			
	6,876	0	−1,180	−5,902	−4,114	−3,047	−0,779	+1,217	+1,652	+0,583		
	6,409	0	−1,107	−5,135	−5,977	−3,035	−0,818	+1,413	+2,365	+1,642	+0,340	

Získaný průběh odezvy je vynesen do grafů na obr. 13 (str. 24). Hodnoty odezvy námi získané jsou označeny křížky. Hodnoty převzaté z literatury [8] jsou označeny čtverečky. Z porovnání obou výpočtů je patrna rychlost popsané methody. Přesné řešení úlohy známo není.

8.4. Výpočet odezvy uzavřené smyčky ze známé odezvy otevřené smyčky

Mezi klasické problémy theorie regulace patří stanovení odezvy uzavřené smyčky, je-li známa odezva otevřené smyčky. Ukážeme si, jak jednoduše lze řešiti tuto úlohu pomocí popsané methody.

Vztah mezi přenosem uzavřené smyčky $D(p)$ a přenosem otevřené smyčky $G(p)$ je dán známým vzorcem

$$D(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Obraz výstupu uzavřené smyčky (obr. 14) pak je

$$Y(p) = \frac{G(p)\,X(p)}{1 + G(p)}\,. \tag{13}$$

Obr. 14.

Odezva uzavřené smyčky na jednotkový impuls.

Jde-li o nalezení odezvy na jednotkový impuls, je $X(p) = 1$ a ze srovnání výrazů (13) a (1) plyne

$$U(p) = Z(p) = G(p)$$

a tudíž i

$$u(t) = z(t) = g(t)\,,$$

kde $g(t)$ je odezva otevřené smyčky na jednotkový impuls. Hledanou odezvu nalezneme pouhým dosazením hodnot $g_k = g(k\Delta)$ do tabulky 1. Je-li známa odezva otevřené smyčky na jednotkový skok (na př. experimentálně získaná), je ji třeba nejprve derivovat (numericky, graficky nebo graficko-mechanicky).*)

*) Požadavky na přesnost derivace nejsou veliké. Viz př. 6.

Obr. 13.
Obr. 16.

Odezva uzavřené smyčky na jednotkový skok.

V případě odezvy uzavřené smyčky na jednotkový skok $X(p) = \frac{1}{p}$ a podle (13) a (1)

$$U(p) = \frac{1}{p}\,G(p)\,,$$
$$Z(p) = G(p)\,.$$

Označíme-li odezvu na jednotkový impuls otevřené smyčky $g(t)$ a odezvu otevřené smyčky na jednotkový skok $g_1(t)$, bude

$$u(t) = g_1(t) = g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$
$$z(t) = g(t) = g_1'(t)\,.$$

Známe-li odezvu otevřené smyčky na jednotkový impuls, musíme ji integrovat, abychom získali potřebné hodnoty $u(t)$ pro dosazení do tabulky 1. Naopak, známe-li odezvu otevřené smyčky na jednotkový skok, musíme ji derivovat, abychom získali potřebné hodnoty $z(t)$.

Příklad 5. Jako příklad uvedeme nalezení odezvy regulačního obvodu na obr. 15 na jednotkový impuls. Řešení tohoto případu jinými methodami je uvedeno v literatuře [9].

Obr. 15.

Otevřenou smyčku tvoří seriové spojení pěti aperiodických článků s časovými konstantami

$T_1 = 1{,}2$ s; $T_2 = 0{,}2$ s; $T_3 = 0{,}01$ s; $T_4 = 0{,}01$ s; $T_5 = 0{,}07$ s.

Celkový zisk otevřené smyčky je 14. Přenos otevřené smyčky je podle toho

$$G(p) = \frac{14}{(1 + 1{,}2p)(1 + 0{,}2p)(1 + 0{,}01p)(1 + 0{,}07p)}\,.$$

Póly přenosu jsou patrné, a proto odezvu otevřené smyčky na jednotkový impuls snadno vypočteme. Mohla by též být naměřena nebo získána derivací odezvy na jednotkový skok. Její hodnoty po intervalech $\Delta = 0{,}1$ s jsou:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_k	0	1,610	4,539	6,574	7,632	8,014	7,983	7,716	7,325	6,876	6,409

Protože $g(0) = 0$, platí $\varkappa = 1$, $u_k = g_k$, $\bar{z}_k = 0{,}01 g_k$. Po dosazení do tabulky 1 obdržíme:

0		0	0	0	0,095	0,181	0,230	0,224	0,179	0,128	0,095	0,105
0,003	0											
0,543	0	0										
0,491	0	0	0									
0,445	0,095	0	0	0								
0,402	0,181	0	0	0	0							
0,364	0,259	0	0	0	−0,028	0						
	0,330	0	0	0	−0,052	−0,054	0					
	0,393	0	0	0	−0,047	−0,098	−0,069	0				
	0,451	0	0	0	−0,042	−0,089	−0,125	−0,057	0			
	0,503	0	0	0	−0,038	−0,081	−0,113	−0,122	−0,054	0		
	0,551	0	0	0	−0,035	−0,066	−0,102	−0,110	−0,097	−0,038	0	

Získaná odezva uzavřené smyčky je vynesena do grafu na obr. 16 (viz str. 24). Pro porovnání jsou uvedeny i hodnoty (také jen přibližné) převzaté z lit. [3]; jsou označeny čtverečky.

8.5. Výpočet odezvy regulačního obvodu z daných přechodových charakteristik regulované soustavy a regulátoru

Uvažujme regulační obvod na obr. 17, kde $S(p)$ jest přenos regulované soustavy a $\mathbf{Z}(p)$ je přenos regulátoru. Porucha nechť působí v obecném místě regu-

Obr. 17.
Obr. 18.

lované soustavy. Podle zákona superposice, který platí pro lineární soustavy lze obvod překreslit do tvaru na obr. 18, kde $S^*(p)$ je přenos regulované soustavy od místa poruchy k jejímu výstupu. Pro obraz výstupu pak platí

$$Y(p) = \frac{S^*(p)\,X(p)}{1 + S(p)\,R(p)}\,. \tag{14}$$

Předpokládejme, že jsou známy odezvy soustavy (i její části S^*) a regulátoru na jednotkový impuls [$s(t)$, $s^*(t)$, $r(t)$]. Získali jsme je experimentálně přímo nebo derivací odezvy na jednotkový skok. Z porovnání výrazu pro obraz výstupu (13) a výrazu (1) plyne

$$U(p) = S^*(p)\,X(p)\,,$$
$$Z(p) = S(p)\,R(p)\,.$$

Budeme-li znát originály k těmto funkcím $u(t)$ a $z(t)$, stačí k nalezení odezvy obvodu dosadit do tabulky 1. Hledáme-li odezvu na jednotkový impuls (skok), je $u(t)$ shodné s odezvou na jednotkový impuls (skok) části regulované soustavy mezi místem poruchy a výstupem. $z(t)$ je dáno konvolutorním integrálem

$$z(t) = \int_0^t s(t-\tau)\,r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{15}$$

který můžeme vyčíslit pomocí přibližného výrazu

$$z_k = a_k\left(\frac{s_0}{2}\,r_k - s_k\,\frac{r_0}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} s_{k-i} r_i\right)\Delta\,.$$

Jeho vyčíslení pro různé hodnoty k můžeme upravit do tabulky 2 podobné tabulce 1. Při tom násobení hodnotou Δ provádíme až před dosazením do tabulky 1, abychom ušetřili jednu operaci. Pak bude

$$\bar{z}_k = z_k\Delta = \bar{\bar{z}}_k\Delta^2\,.$$

Tabulka II

$\frac{r_0}{2}$	$\frac{s_0}{2}$	s_1	s_2	s_3	s_4		...
r_1	0						$\bar{\bar{z}}_0$
r_2	$\frac{s_0}{2} r_1$	$s_1 \frac{r_0}{2}$					$\bar{\bar{z}}_1$
r_3	$\frac{s_0}{2} r_2$	$s_1 r_1$	$s_2 \frac{r_0}{2}$				$\bar{\bar{z}}_2$
r_4	$\frac{s_0}{2} r_3$	$s_1 r_2$	$s_2 r_1$	$s_3 \frac{r_0}{2}$			$\bar{\bar{z}}_3$
	$\frac{s_0}{2} r_4$	$s_1 r_3$	$s_2 r_2$	$s_3 r_1$	$s_4 \frac{r_0}{2}$		$\bar{\bar{z}}_4$

Příklad 5. Stávající objekt má být opatřen samočinnou regulací. Odezva soustavy, jež má býti regulována, na jednotkový skok na jejím vstupu byla vyšetřena experimentálně a je uvedena na obr. 19 (křivka $s_1(t)$). Zajímá nás odezva soustavy s připojeným regulátorem podle obr. 20 na jednotkový skok na vstupu regulované soustavy. Odezva regulátoru na jednotkový skok je rovněž na obr. 19 (křivka $r_1(t)$).

Podle předešlého platí $u(t) = s_1(t)$. Pro výpočet potřebných hodnot z musíme nejprve odezvy $s_1(t)$ a $r_1(t)$ derivovat, abychom dostali $s(t)$ a $r(t)$, které pak dosadíme do tabulky 2. Požadavky na přesnost derivace nejsou veliké. Provedeme ji numericky. Vystačíme s prvním přiblížením, podle kterého jest hodnota derivace funkce $f(t)$ v čase $t = k\Delta$

$$f'_k = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2\Delta}\,.$$

Výpočet podle této formule postupuje velmi rychle.*) Interval Δ volíme tak, aby řada hodnot f dobře nahrazovala průběh funkce $f(t)$. V našem případě volíme interval s ohledem na průběh $s_1(t)$ 0,25 s. Tak obdržíme (uvedeme výpočet prvých deseti hodnot hledané odezvy):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s_{1k}	0	0,015	0,049	0,098	0,155	0,217	0,279	0,340	0,399	0,455	0,509
s_k	0,060	0,098	0,166	0,212	0,238	0,248	0,246	0,240	0,230	0,220	0,206
r_{1k}	0	2,21	3,03	3,32	3,44	3,47	3,49	3,5	3,5	3,5	3,5
r_k	8,85	6,06	2,22	0,82	0,30	0,10	0,06	0,02	0,00	0,00	0,00

Hodnoty s_k a r_k dosadíme do tabulky 2.

4,425	0,030	0,098	0,166	0,212	0,238	0,248	0,246	0,240	0,230	0,220	0,206	
6,06	0											0
2,22	0,182	0,435										0,617
0,82	0,067	0,595	0,735									1,397
0,30	0,025	0,218	1,005	0,939								2,187
0,10	0,009	0,080	0,369	1,285	1,053							2,793
0,06	0,003	0,029	0,136	0,471	1,443	1,098						3,180
0,02	0,002	0,010	0,050	0,174	0,628	1,502	1,088					3,354
0,00	0,001	0,006	0,017	0,064	0,195	0,551	1,490	1,062				3,386
0,00	—	0,002	0,010	0,021	0,071	0,204	0,546	1,455	1,018			3,327
	—	—	0,003	0,013	0,024	0,074	0,202	0,535	1,394	0,974		3,217
	—	—	—	0,004	0,014	0,025	0,074	0,197	0,511	1,333	0,912	3,070

*) Za derivaci v počátku vezmeme přibližnou hodnotu $f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{\Delta}$.

Hledanou odezvu získáme dosazením hodnot $\bar{u}_k = s_k$, $\bar{z}_k = \Delta^2 \bar{\bar{z}}_k = 0{,}0625\bar{\bar{z}}_k$ do tabulky 1

0,039		0	0,015	0,048	0,094	0,145	0,193	0,234	0,265	0,286	0,293	0,296
0,087	0											
0,137	0,015	0										
0,175	0,049	0	−0,001									
0,199	0,098	0	−0,002	−0,002								
0,210	0,155	0	−0,002	−0,004	−0,004							
0,212	0,217	0	−0,003	−0,007	−0,008	−0,006						
0,208	0,279	0	−0,003	−0,008	−0,013	−0,013	−0,008					
0,201	0,340	0	−0,003	−0,010	−0,016	−0,020	−0,017	−0,009				
0,192	0,399	0	−0,003	−0,010	−0,019	−0,025	−0,026	−0,020	−0,010			
	0,455	0	−0,003	−0,010	−0,020	−0,029	−0,034	−0,032	−0,023	−0,011		
	0,509	0	−0,003	−0,010	−0,020	−0,030	−0,038	−0,041	−0,036	−0,025	−0,011	

Příklad byl zvolen tak, aby bylo možno nalézt i přesné řešení, které představuje křivka na obr. 21. Křížky jsou označeny hodnoty námi získané.

8.6. Závěr

V článku je popsána jednoduchá numerická methoda pro výpočet odezev lineárních regulačních obvodů. Uvedená methoda umožňuje rychlý výpočet odezvy regulačního obvodu soustavy, je-li známa soustava diferenciálních rovnic popisujících chování jejích jednotlivých článků, resp. je-li znám celkový přenos obvodu v operátorovém tvaru. Umožňuje též jednoduše vyšetřit odezvu uzavřené smyčky, je-li známa odezva otevřené smyčky, a odezvu regulačního obvodu, jsou-li známy (na př. experimentálně zjištěny) přechodové charakteristiky regulované soustavy a regulátoru.

Rychlost s jakou vede methoda k cíli je patrna z připojených příkladů. Pro posouzení přesnosti výsledků methodou dosažených jsou uvedeny i jednoduché příklady, jejichž přesné řešení lze snadno nalézt. Je z nich patrno, že methoda dává dobré výsledky i při volbě poměrně velmi hrubého intervalu Δ, při čemž se počet potřebných číselných operací značně sníží. Je pozoruhodné, že přesnosti výsledku s délkou vyčíslované odezvy neubývá.

Po přípravě výpočtu, která odborníkovi nezabere mnoho času (úprava obrazu odezvy do tvaru (1), rozvoj pro funkce $U(p)$ a $Z(p)$ a volba intervalu Δ), může vyčíslení provádět kancelářská síla s nižší odbornou kvalifikací.

Autorovi je milou povinností poděkovat svému školiteli doc. Ing. Dr J. Nekolnému za cenné rady, které mu poskytl během vypracování této práce.

Literatura

[1] V. V. Solodovnikov, O primenenii trapeciodalnych častotnych charakteristik k analizu kačestva sistem avtomatičeskogo regulirovanija, Avtomatika i telemechanika, 1948, č. 4.
týž, Vvedenije v statističeskuju dinamiku sistem avtomatičeskovo upravlenija, Gosizdat techn.-teor. lit., Moskva 1952.

[2] G. S. Brown, D. P. Cambell, Principles of Servomechanisms, N. Y. 1948.

[3] A. Leonhard, Trans. ASME, 76 (8), 1954.

[4] Podrobněji o vývoji těchto method viz: Trudy vtorogo vsěsojuznogo sověščanija po teorii avtomatičeskogo regulirovanija, Tom II, str. 41 AN SSSR, 1955.

[5] A. Tustin, A Method of analysing the Behavour of Linear Systems in Terms of Time Series, Journal IEE, IIA, 1947.

[6] R. Boxer, S. Thaler, A Simplified Method of Solving Linear and Nonlinear Systems, Proc. IRE, Jan. 1956.

[7] Z. Š. Bloch, Integralnyje uravnenija teorii regulirovanija, Rasčot i analiz sistem avtomatičeskogo regulirovanija mašin (Sborník naučnych rabot), Mašgiz, Moskva 1954.

[8] A. Leonhard, Trans. ASME, 76 (8), 1954. Viz též ruský překlad ve sborníku Mašinostrojenije, 5 (23), Izd. inostr. lit., Moskva 1955.

[9] J. Beneš a Z. Trnka, Matematické a grafické methody řešení regulačních soustav. Souhrn prací o automatisaci, ČSAV, 1955.

Obr. 6.

Obr. 19.
Obr. 20.
Obr. 21.

9. ČÍSELNÝ VÝPOČET ODEZVY NELINEÁRNÍHO A ČASOVĚ PROMĚNNÉHO REGULAČNÍHO SYSTÉMU

Ing. Jiří Rippl
VÚTT Praha

Theoretické řešení regulačních systémů, jejichž funkce je popsána diferenciálními rovnicemi nelineárními nebo s časově proměnnými koeficienty, je stále ještě obtížné a mnohé problémy zůstávají dosud nevyřešeny. V regulační technice jde zejména o rozřešení těchto základních úloh:

a) určení stability regulačního systému,

b) určení časového průběhu regulačního pochodu.

Prvý problém lze řešit užitím Ljapunovských kriterií (L-9) a přiblíženou linearisací výchozích rovnic. Řešení druhého problému je dáno integrálem základních diferenciálních rovnic a je známo několik způsobů počtářských, grafických i kombinovaných, které umožňují jeho výpočet. Většinou jde však o početní způsoby velmi pracné a nevhodné pro použití u rovnic nelineárních. V dalším naznačíme početní postup pro řešení regulačních problémů daných obyčejnými diferenciálními rovnicemi lineárními i nelineárními, založený na využití všech výhod symbolického operátorového počtu. Na základě toho lze pak při numerickém výpočtu používat nejjednodušších základních početních úkonů proveditelných na počítacích strojích a výpočtových tabulkách.

9.1. Operátorový počet Mikusiňského

Při teoretickém výpočtu průběhy odezvy na libovolný vstup u regulačního systému dospějeme k úloze řešit konvolutorní integrál (3) a (4) tohoto typu

$$\int_0^t y(t-\tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau ,$$

kde jedna z funkcí je odezva na jednotkový impuls a druhá je daný libovolný vstup. O početní methodě k vyčíslení tohoto integrálu zmínil se ve své přednášce Ing. Peterka. Výpočet odezvy se jeví ve zcela novém světle při použití Mikusiňského operátorového počtu (1), (2), neboť je mnohem obecnější a exaktnější než dosud užívaná Laplaceova transformace. Jeho předností je, že obchází celkem zbytečný postup transformace funkce, výpočet obrazu a zpětný výpočet originálu, při tom však zachovává všechny přednosti Laplaceovy integrální transformace a rovněž i její pravidla. Charakter operátorového počtu Mikusiňského je zcela algebraický a Laplaceova integrální transformace se jeví jako jeho jistý speciální případ.

Pro informaci vyslovíme v dalším výkladu pouze nejpodstatnější vlastnosti a pravidla tohoto počtu, kterých bude zapotřebí pro pochopení a objasnění použité symboliky.

Základem operátorového počtu Mikusiňského je zcela nové pojetí funkce $f(t)$ a její hodnoty v bodě t.

Hodnotou funkce $f(t)$ v bodě t je číslo $f(t)$, a není-li funkce proměnná s parametrem t, pak je číselnou konstantou.

Funkci $f(t)$ v operátorovém počtu je nutno pojímat jako množinu všech hodnot funkce $f(t)$ na intervalu $0 \leqq t < \infty$, kterou označíme symbolicky $\{f(t)\}$ na rozdíl od číselné hodnoty funkce. Funkce $\{f(t)\}$ má na intervalu $0 \leqq t < \infty$ hodnoty $f(t)$ a v intervalu $-\infty < t < 0$ hodnoty $f(t) = 0$.

Na př. funkce $\{1\}$ značí jednotkovou skokovou funkci (t. j. funkci, která má pro všechna záporná t hodnotu 0 a pro všechna kladná t číselnou hodnotu 1). Naproti tomu 1 je pouhé číslo, číselný operátor.

Pro takto zavedené funkce lze vybudovat algebru, která má shodná početní pravidla jako při počítání s čísly.

Součet dvou funkcí $\{f\}$ a $\{g\}$ je funkce $\{h\}$, jejíž všechny hodnoty v libovolném čase t jsou dány součtem hodnot obou funkcí v témž čase t. Platí tedy

$$\{f\} + \{g\} = \{h\} = \{f + g\} .$$

Součin dvou funkcí $\{f\}$ a $\{g\}$ nazýváme splotem nebo konvolucí a definujeme jej konvolutorním integrálem

$$\{f\}\{g\} = \{\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\} .$$

Toto jednoduché symbolické vyjádření konvolutorních integrálů je jedním z hlavních důvodů, proč užíváme tento počet. Pro součet i součin funkcí platí komutativní, asociativní a distributivní zákony obdobně jako při počítání s čísly.

Z definice splotů dále plyne

$$\{1\}\{f\} = \{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\}$$

a pro celé kladné číslo n

$$\{1\}^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}.$$

Násobení funkce $\{f(t)\}$ číslem k je definováno jako funkce, jejíž všechny hodnoty jsou násobeny tímto číslem, čili

$$k\{f(t)\} = \{k\,f(t)\}.$$

Při počítání s čísly dává dělení vznik zlomkům. Dělením funkcí vznikají nové útvary — operátory. Důležitým operátorem je $s = \frac{1}{\{1\}}$. Jeho vlastnost podává výpočet z rovnice

$$k\{1\} = \{k\},$$

kde k je konstanta. Po dělení rovnice jednotkovou skokovou funkcí $\{1\}$ plyne:

$$k = \frac{\{k\}}{\{1\}} = s\{k\}.$$

Skoková funkce $\{k\}$ násobená operátorem s je číselným operátorem k, tedy prostě číslem (impulsovou funkcí velikosti k). Z rovnice

$$\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\} = \{1\}\{f(t)\}$$

lze vypočítat $\{f(t)\}$ pomocí operátoru s takto:

$$s\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\} = \{f(t)\}.$$

Operátor s je operátorem inversním k integraci, tedy operátorem derivačním.

Má-li funkce $\{a(t)\}$ derivaci a', pak platí

$$s\{a\} = \{a'\} + a(0),$$

kde $a(0)$ je hodnota funkce $\{a(t)\}$ v čase $t = 0$.

Důkaz tohoto tvrzení obdržíme zpětnou integrací. Násobme celou rovnici $\{1\}$ a obdržíme identitu

$$\{a\} = \{1\}\{a'\} + \{a(0)\} = \{\int_0^t a'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + a(0)\} = \{a\}.$$

Zobecněním tohoto tvrzení, které uvedeme již bez důkazu, je

Věta 1. Má-li funkce a n-tou derivaci $a^{(n)}$, pak platí

$$s^n\{a\} = \{a^{(n)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} s^i a_{(0)}^{(n-i-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

kde $a_{(0)}^{(n-i-1)}$ jsou počáteční podmínky.

Vztah operátoru Mikusińského k Laplaceově transformaci podává translační theorem.

Posunutí funkce $\{f(t)\}$ ve směru osy času o míru λ určuje výraz

$$\mathrm{e}^{-\lambda s}\{f(t)\} = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leqq t < \lambda, \\ f(t-\lambda) \text{ pro } 0 \leqq \lambda < t. \end{cases}$$

Hodnoty funkce $f(t)$ pokládejme za číselný operátor proměnné λ čili $f(\lambda)$. Pak podle právě uvedeného translačního theoremu je možno množinu všech hodnot $f(\lambda)$ vyjádřit jako funkci $\{f(t)\}$ ve formě součtu všech impulsů $f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ posunutých o hodnotu λ v kladném smyslu na ose času t, čili

$$f(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda s}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Protože v zavedeném operátorovém počtu máme nenulové hodnoty funkce $\{f(t)\}$ definovány na intervalu $0 \leqq t < \infty$, sečteme všechny impulsy na tomto intervalu, t. j. $0 \leqq \lambda < \infty$. Tím dostaneme $\{f(t)\}$ vyjádřenou pomocí číselného operátoru $f(\lambda)$ ve tvaru

$$\{f(t)\} = \int_0^\infty f(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}\lambda = Q(s).$$

Tento integrál je formálně shodný s Laplaceovou integrální transformací, která se dříve považovala za matematický základ operátorového počtu objeveného Haevisidem [5].

Tato souvislost opravňuje též použití operátorových slovníků sestavených pro Laplaceovu transformaci v theorii operátorů Mikusinského [6]. Z tohoto důvodu, jak se dá též přímo dokázat, operátorům $\frac{1}{s-\alpha}$ přísluší funkce $\{e^{\alpha t}\}$ čili platí

$$\frac{1}{s^\lambda} = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}; \quad \frac{1}{(s-\alpha)^\lambda} = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\right\}, \qquad (\lambda > 0).$$

Právě tak platí

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\right\}; \quad \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2} = \{\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\}; \quad \dots$$

Postup a výhody výpočtu ukážeme na příkladě jednoduché diferenciální rovnice

$$y'' + \beta^2 y = f(t).$$

Přepsáním dostáváme

$$\{y''\} + \beta^2\{y\} = \{f(t)\}.$$

Pomocí věty 1 pro nulové počáteční podmínky $y'(0) = y(0) = 0$ platí

$$\{y\} = \frac{1}{s^2 + \beta^2}\{f(t)\} = \frac{1}{\beta}\{\sin \beta t\}\{f(t)\}$$

čili

$$y = \frac{1}{\beta}\int_0^t \sin \beta(t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau .$$

Rovnici řešíme tak, že rozložíme operátorové výrazy na částečné zlomky s operátorem s, k nimž funkce známe, nebo vyhledáme v operátorovém slovníku, a provedeme konvoluci nalezených funkcí.

Není-li možno jednoduchým způsobem určit kořeny polynomu ve jmenovateli operátorového výrazu, takže zlomek není možno rozložit v částečné zlomky, je možné přibližné řešení methodou vyčíslení konvolutorních integrálů.

Postup je obdobný methodě, o níž referoval Ing. Peterka. Na př. mějme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty čtvrtého řádu v operátorovém tvaru

$$(s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)\{y\} = (b_1 s + b_0)\{x\} .$$

Dělením $s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2$ celé rovnice obdržíme

$$\left(1 + \frac{c_1 s + c_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)}\right)\{y\} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)}\{x\} .$$

Položme po snadné úpravě

$$\frac{c_1 s + c_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)} = \{t\}\frac{c_1 s + c_0}{s^2 + c_3 s + c_2} = \{t\}\{g(t)\} = \{C(t)\}$$

a

$$\frac{b_1 s + b_0}{s^2(s^2 + c_3 s + c_2)} = \{B(t)\} ,$$

pak

$$\{y\} = -\{C(t)\}\{y\} + \{B(t)\}\{x(t)\}$$

čili

$$y = -\int_0^t C(t - \tau)\, y(\tau)\, d\tau + \int_0^t B(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau .$$

Rovnici lze řešit vyčíslením konvolutorního integrálu.

V dalším uvedeme větu důležitou pro řešení lineárních rovnic s proměnnými koeficienty.

Věta 2. Má-li funkce $x(t)$ spojité všechny derivace až do n-té a funkce $a(t)$ rovněž spojité všechny derivace až do n-té, pak platí

$$\{ax^{(n)}\} = \sum_{k=0}^{n} s^k(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\{a^{(n-k)}x\} = \\ -\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} s^k(-1)^{n-l}\binom{bn + k - l}{k} a_{(0)}^{(n-l)} x_{(0)}^{(s-k-1)} \tag{2}$$

pro celé $n \geqq 1$.

Důkaz. Ve sčítacích indexech počátečních podmínek výrazu (2) zaveďme relaci

$$l' = l - k - 1$$

a po omezení sčítacích mezí nového indexu l' a prohození sledu sčítání dostáváme vztahy (psáno symbolicky)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l'=0}^{n-k-1} = \sum_{l'=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-l'-1} .$$

Po přepsání rovnice (2) obdržíme

$$\{ax^{(n)}\} = \sum_{k=0}^{n} s^k(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\{a^{(n-k)}x\} - \\ -\sum_{l'=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-l'-1} s^k(-1)^{n-l'-k-1}\binom{n - l' - 1}{k} a_{(0)}^{(n-l'-k-1)} x_{(0)}^{(l')} \tag{2a}$$

Rovnice (2) a (2a) jsou identické. V dalším budeme psát v rovnici (2a) místo l' pouze l.

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Integrací per partes Laplaceova obrazu $ax^{(n+1)}$ dostáváme vztah

$$\{ax^{(n+1)}\} = \int_0^{\infty} ax^{(n+1)}e^{-st}\, dt = ax^{(n)}e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \\ -\int_0^{\infty} a'x^{(n)}e^{-st}dt + s\int_0^{\infty} ax^{(n)}e^{-st}dt = -a_{(0)}x_{(0)}^{(n)} - \\ -\{a'x^{(n)}\} + s\{ax^{(n)}\} . \tag{3}$$

Dosazením tvrzení (2a) do (3) dostáváme

$$-a(0)\, x_{(0)}^{(n)} + \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-l} s^k(-1)^{n-1-k-l}\binom{n - 1 - l}{k} a_{(0)}^{(n-k-l)} x_{(0)}^{(l)} - \\ -\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1-l} s^{k+1}(-1)^{n-1-k-l}\binom{n - 1 - l}{k} a_{(0)}^{(n-1-k-l)} x_{(0)}^{(l)} - \\ -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}s^k\binom{n}{k}\{a^{(n-k+1)}x\} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}s^{k+1}\binom{n}{k}\{a^{(n-k)}x\} = \\ = -a(0)\, x^{(n)}(0) - \\ -\sum_{l=1}^{n-1}\left((-1)^{n-l}a_{(0)}^{(n-l)} - \sum_{k=1}^{n-1-l} s^k(-1)^{n-k-l}\left[\binom{n-1-l}{k} + \binom{n-1-l}{k-1}\right]a_{(0)}^{(n-k-l)} - \\ - s^{n-l}a(0)\right) x_{(0)}^{(l)} + (-1)^{n+1}\{a^{(n+1)}x\} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k+1}s^k\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \cdot \\ \cdot\{a^{(n-k+1)}x\} + s^{n+1}\{ax\} = \\ = -\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} s^k(-1)^{n-k-l}\binom{n-l}{k} a_{(0)}^{(n-k-l)} x_{(0)}^{(l)} + \\ + \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}s^k\binom{n+1}{k}\{a^{(n-k+1)}x\} = \{ax^{(n+1)}\} .$$

Tím je dokázáno tvrzení (2a) a též identické tvrzení věty 2.

9.2. Numerický výpočet bodů odezvy lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty

Mějme diferenciální rovnici popisující regulační pochod otevřené smyčky ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(t)\, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\, x^{(i)}\,; \quad n > m\,. \tag{4}$$

Koeficienty a_i, b_i jsou spojitými analytickými funkcemi času mající dle potřeby všechny derivace. Nechť $a_n = 1$.

Aplikujme na rovnici (4) operátorový počet Mikusińského. Pak dostáváme

$$\{y^{(n)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} \{a_i y^{(i)}\} = \sum_{i=0}^{m} \{b_i x^{(i)}\} \tag{5}$$

a po úpravě podle věty 1 a 2

$$\begin{aligned} s^n\{y\} = &- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} s^k (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \{a_i^{(i-k)} y\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=k+1}^{i} s^k (-1)^{i-l} \binom{i+k-l}{k} a_i^{(i-l)}(0)\, y^{(l-k-1)}(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} s^i y^{(n-i-1)}(0) + \sum_{i=0}^{m} \{b_i x^{(i)}\}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

U dvojnásobného součtu ve výrazu (6) prohoďme pořad sečítání podle symbolické rovnice

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1}$$

a u trojnásobného součtu počátečních podmínek podle symbolické rovnice

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=k+1}^{i} = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} \sum_{i=l}^{n-1}.$$

Zaveďme označení A_k pro funkce vystupující v rovnici (6) ve tvaru

$$A_k = \sum_{i=k}^{n-1} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} a_{(i)}^{(i-k)}(t) \tag{7}$$

a pro počáteční podmínky

$$C_{l,k} = \sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{i-l} \binom{i+k-l}{k} a_i^{(i-l)}(0)\,. \tag{7a}$$

Spojením výrazu (7) a (7a) s rovnicí (6) a po úpravě obdržíme zjednodušený vztah

$$\begin{aligned} s^n\{y\} = &- \sum_{k=0}^{n-1} s^k \{A_k(t)\, y\} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} s^k C_{lk}\, y^{(l-k-1)}(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} s^i y^{(n-i-1)}(0) + \sum_{i=0}^{m} \{b_i x^{(i)}\}\,. \end{aligned} \tag{6a}$$

Násobme rovnici (6a) funkcí

$$\{1\}^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$$

(rovnici n-krát integrujeme).

Vzhledem ku vlastnostem operátoru s^j a funkce $\{1\}^j$ dostáváme

$$\begin{aligned} \{y\} = &- \sum_{k=0}^{n-1} \left\{\frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right\} \{A_k y\} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} C_{l,k}\, y^{(l-k-1)}(0) \left\{\frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right\} + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} y^{(n-i-1)}(0) \left\{\frac{t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\right\} + \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \sum_{i=0}^{m} \{b_i x^{(i)}\}\,. \end{aligned}$$

Označme dále obecně

$$\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \{z\}\,, \quad \left\{\frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right\} = \{z_k\}\,. \tag{9}$$

a funkcí $\{u\}$ součet všech známých funkcí času vystupujících v rovnici (8). Platí

$$\{u\} = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} C_{l,k}\, y^{(l-k-1)}(0)\, \{z_k\} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(n-i-1)}(0)\, \{z_i\} + \{z\} \sum_{i=0}^{m} \{b_i x^{(i)}\}\,. \tag{9a}$$

Spojením rovnic (9) a (9a) s rovnicí (8) dostaneme zjednodušený vztah

$$\{y\} = - \sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\}\{A_k y\} + \{u\}\,. \tag{10}$$

Pro číselný výpočet funkce y z rovnice (10) je třeba numericky vypočíst konvolutorní integrál pomocí diferencí Δt (viz referát Ing. Peterky). Pro $\varkappa$-tou hodnotu funkce y v bodě $\varkappa\, \Delta t$, kterou v dalším označíme $y(\varkappa\, \Delta t) = y_{(\varkappa)}$ se konvolutorní integrál určí pomocí známých (dříve vypočtených) $\varkappa$-hodnot funkcí $y_{(0)}, y_{(1)}, \ldots, y_{(\varkappa-1)}$. Pro snadné a schematické vyčíslení zaveďme hodnotu $z_{l(\nu)}$, kterou budeme rozumět hodnotu funkce z_l v bodě $\nu\, \Delta t$ násobenou ještě hodnotou intervalu Δt.

$$z_l(\nu\, \Delta t)\, \Delta t = z_{e(\nu)}\,. \tag{11}$$

V uvedeném speciálním případě je tedy

$$z_{l(\nu)} = \frac{(\nu\, \Delta t)^{n-l-1}}{(n-l-1)!}\, \Delta t\,. \tag{11a}$$

Rovnici (10) lze tedy upravit pro hrubý numerický výpočet do tvaru

$$y_{(\varkappa)} = u_{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} z_{l(\varkappa)} A_{l(0)} y_{(0)} - \tag{12}$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1}\sum_{l=0}^{n-1} z_{l(\varkappa-\nu)} A_{l(\nu)} y_{(\nu)} - \tfrac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} z_{l(0)} A_{l(\varkappa)} y_{(\varkappa)} .$$

Jak plyne z (11a), je v tomto případě číslo $z_{l(0)}$ o neznámé $y_{(\varkappa)}$ rozdílné od nuly pouze pro $l = n - 1$ a má hodnotu

$$z_{n-1(0)} = \Delta t .$$

V rovnici (12) dostáváme tedy na pravé straně rovněž neznámou hodnotu $y_{(\varkappa)}$ ve třetím (posledním) součtu pro případ, že $l = n - 1$. Pak pomocí (7) obdržíme

$$- \tfrac{1}{2} z_{n-1(0)} A_{n-1(\varkappa)} y_{(\varkappa)} = - \tfrac{1}{2} a_{n-1(\varkappa)} y_{(\varkappa)} \Delta t .$$

Poněvadž $a_{n-1(\varkappa)}$ je danou funkcí času, můžeme $y_{(\varkappa)}$ z diferenční rovnice (12) vypočítat

$$y_{(\varkappa)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1(\varkappa)}} \left[u_{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} z_{e(\varkappa)} A_{e(0)} y_{(0)} - \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1}\sum_{l=0}^{n-1} z_{e(\varkappa-\nu)} A_{e(\nu)} y_{(\nu)} \right] . \tag{13}$$

Jestliže $a_{n-1} =$ konst, pak je možno zavést nové funkce $\bar{u}_{(\mu)}$, $\bar{z}_{l(\mu)}$ ve tvaru

$$\bar{u}_{(\mu)} = \frac{u_{(\mu)}}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1}} , \qquad \bar{z}_{l(\mu)} = \frac{z_{(\mu)}}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1}} , \tag{14}$$

takže rovnice (13) dostane tvar

$$y_{(\varkappa)} = \bar{u}_{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{l(\varkappa)} A_{l(0)} y_{(0)} - \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1}\sum_{l=0}^{n-1} \bar{z}_{l(\varkappa-\nu)} A_{l(\nu)} y_{(\nu)} . \tag{15}$$

Tento vztah lze sestavit v poměrně jednoduchou výpočtovou tabulku, vhodnou pro praktický výpočet. Funkci $\bar{u}_{(\varkappa)}$, $\bar{z}_{l(\varkappa-\nu)}$ a $A_{l(\varkappa)}$ můžeme spočítat přímo, protože nezávisí na hodnotách $y_{(\varkappa)}$.

9.3. Zjednodušení výpočtové methody

Předpokládejme, že diferenciální rovnice (4) obsahuje vedle koeficientů proměnných s časem též konstanty c_i a d_i. Nechť tedy diferenciální rovnice zní:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} d_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} b_i(|)\, x^{(i)} , \tag{16}$$

kde $c_n = 1$, a po úpravách v operátorovém tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} {}_i s^i\{y\} + \sum_{k=0}^{n-1} s^k\{A_k y\} \doteq \sum_{i=0}^{m} d_i\{x^{(i)}\} + \sum_{i=0}^{m} \{b_i(t)\, x^{(i)}\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} s^k c_i y^{(i-k-1)}(0) + \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1} s^k C_{l,k} y^{(l-k-1)}(0) . \tag{17}$$

Předpokládejme, že dovedeme určit funkci příslušející operátoru

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} c_i s^i} = \{\eta(t)\} .$$

V případě, že to není možné, vybereme alespoň vhodný, pokud možno co nejvyšší počet konstantních koeficientů u nejvyšších derivací, tvořících lineární mnohočlen $P(s)$, a určíme k nim funkci $\frac{1}{P(s)} = \{\eta(t)\}$. Chybějící lineární členy zahrneme do funkcí a. Způsob je obdobný uvedené methodě řešení diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Vynásobíme tedy celou rovnici (17) operátorem $\frac{1}{P(s)}$. Pak dostáváme

$$\{y\} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{s^l}{P(s)} \{A_l y\} = \frac{1}{P(s)} \sum_{i=0}^{m} \mathrm{d}_i\{x^{(i)}\} + \frac{1}{p(s)} \sum_{i=0}^{m} \{b_i(t)\, x^{(i)}\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} \frac{s^k}{P(s)} c_i y^{(i-l-1)}(0) + \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1} \frac{s^k}{P(s)} C_{l,k} y^{(l-k-1)}(0) . \tag{18}$$

Určíme funkce příslušející operátorům ve vzorci (18), a to za předpokladu, že dovedeme vypočíst přímo funkci $\{\eta\}$ k operátoru $\frac{1}{P(s)}$.

Označíme analogicky, jako v případě (9)

$$\frac{s_l}{P(s)} = s^l\{\eta\} = \{\eta^{(l)}\} = \{z_s\} , \quad l = 0, 1, \ldots, n-1$$

(oprávnění podává věta 3 — viz v dalším) a

$$\{u\} = \{z\} \sum_{i=0}^{m} \{(d_i + b_i(t))\, x^{(i)}\} + \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=l+1}^{n} c_i y^{(i-l-1)}(0)\{z_s\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1} C_{l,k} y_{(0)}^{(l-k-1)}\{z_k\} = \{z\} \sum_{i=0}^{m} \{(d_i + b_i(t))\, x^{(i)}\} +$$
$$+ y(0)\{z_{n-1}\} + \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1} C^{*}_{l,k} y^{(l-k-1)}(0)\{z_k\} .$$

Pak rovnice (18) je formálně shodná s rovnicí (10). (Funkce $\{u\}$ a $\{z_l\}$ jsou však v obou rovnicích rozdílné.

$$\{y\} = -\sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\}\{A_k y\} + \{u\} . \tag{19}$$

Při numerickém výpočtu rovnice (19) obdobně jako v případě rovnice (12) bude nutno znát nenulové počáteční hodnoty funkcí $\{z_k\}$. Pro další výpočet objasníme větu 3.

Věta 3. Nechť polynom $P(s)$ je stupně n. Funkce

$$\{z_l(t)\} = \frac{s^l}{P(s)}, \quad l = 1, 2, \ldots, n-1$$

mají pro $t = 0$ hodnoty nulové, vyjma funkce $\{z_{n-1}\}$, pro niž platí

$$z_{n-1}(0) = \text{konst} \neq 0 .$$

Důkaz. Dle poznatku z operátorového počtu platí

$$\frac{s^l}{P(s)} = \{z_l(t)\}$$

tehdy, je-li polynom $P(s)$ stupně n a $l < n$. Slovy: pro každý podíl polynomů v s, pro něž čitatel je nižšího stupně než jmenovatel, existuje funkce $\{z_l\}$, kterou dostaneme rozkladem zlomku v parciální zlomky, k nimž známe funkce času.

Je-li $l = n$, pak

$$\frac{s^n}{P(s)} = K + \frac{Q(s)}{P(s)} = K + \{z_n\} , \tag{20}$$

kde K je konstanta a $Q(s)$ je opět polynom nižšího stupně než $P(s)$.

Podle definice funkce $\{z_l\}$ a podle věty 1 plyne

$$\{z_l\} = s^l\{z\} = \{z^{(l)}\} + \sum_{i=0}^{l-1} s^i z_{(0)}^{(l-i-1)} .$$

Aby rovnice měla smysl, musí pro $i \neq 0$ být $z^{(l-i-1)} = 0$. Pouze pro $z_{(0)}^{(l-1)}$ může, ale nemusí být roven nule.

Tento vztah s ohledem na rovnici (20) platí až do $l = n$, při tom současně platí

$$\frac{s^n}{P(s)} = s^n\{z\} = \{z^{(n)}\} + \sum_{i=0}^{n-1} s^i z_{(0)}^{n-i-1} = \{z^{(n)}\} + z_{(0)}^{(n-1)} . \tag{21}$$

Z porovnání obou vyjádření (20) a (21) plyne $K = z_{(0)}^{(n-1)}$, $\{z_n\} = \{z^{(n)}\}$. Poněvadž K není nikdy rovno nule, nemůže se nule rovněž rovnat $z_{(0)}^{(n-1)} = z_{n-1}(0) \neq 0$. To dokazuje platnost věty 3

Vztahy zjednodušíme tak, že hodnotou $z_{l(\varkappa)}$ budeme opět rozumět

$$z_{l(\varkappa)} = z_l(\varkappa\, \Delta t)\, \Delta t .$$

Při hrubém numerickém vyčíslení konvolutorního integrálu methodou aproximace integrálu součtem lichoběžníků dospěli jsme k vzorci (12). Z něho se zřetelem na tvrzení věty 3 plyne

$$y_{(\varkappa)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z_{n-1(0)} A_{n-1(\varkappa)}}\, u_{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} z_{l(\varkappa)} A_{l(\varkappa)} y_{(0)} - \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1} \sum_{l=0}^{n-1} z_{l(\varkappa-\nu)} A_{l(\nu)} y(\nu) . \tag{22}$$

Poněvadž

$$A_{n-1(\varkappa)} = a_{n-1(\varkappa)}$$

a

$$a_n = 1$$

je

$$z_{n-1(0)} = \Delta t$$

a vzorec (22) je formálně zcela shodný se vzorcem (13). Je-li tedy $a_{n-1} =$ konst, pak lze zavést funkce s pruhem vztahem (14), přičemž $\bar{u}_{(\mu)}$ i $\bar{z}_{(\mu)}$ budou mít jiné hodnoty. Je tedy způsob odvození vzorce (13) zcela speciálním případem odvození vzorce (22). Postup výpočtu a vlastní vyčíslení konvolutorního integrálu je schematicky znázorněno na tabulce I pro případ, že $a_{n-1} =$ konst a že lze tudíž zavést funkce s pruhem $\bar{u}$ a $\bar{z}_l$, a na tabulce II pro případ, že $a_{n-1} \neq$ konst.

Tabulky III, IV a V jsou pomocné pro schematické vyčíslení hodnot funkcí, vystupujících na tabulce I a II.

9.4. Postup výpočtu integrálu lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty

a) Zvolíme diferenční krok Δt a počet intervalů q integrálů, t. j. celkovou dobu $T = q\, \Delta t$.

b) Provedeme výpočet pomocných hodnot pro tabulku I nebo II.

α) Určíme nejprve funkci $\{y\} = \{z\}$, $n - 1$-krát ji derivujeme a vepíšeme do tabulky III. Vypočítáme hodnoty jednotlivých derivací v bodech 0, Δt, až $q\, \Delta t$, násobíme je Δt a vepíšeme do příslušných sloupců. Tím jsme spočítali hodnoty $z_{l(\mu)}$. Tuto tabulku přeneseme do levé části tabulky II. Je-li $a_{n-1} =$ konst, vynásobíme všechny hodnoty $z_{l(\mu)}$ koeficientem $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{2} a_{n-1}}$ a zapíšeme do tabulky I.

β) Do tabulky IV vyneseme hodnoty koeficientů při neznámých (které v rovnici zbyly), t. j. hodnoty všech proměnných koeficientů a zbývajících konstant, které nefigurují ve funkci $\{\eta\}$ a jejích derivací pro hodnoty 0, Δt až $q\ \Delta t$ a jednotlivé sloupce příslušející těmže hodnotám $\varkappa$ sečteme a zaneseme do tabulky I nebo II nahoru.

γ) Spočítáme v tabulce V hodnoty okrajových podmínek. Počáteční hodnoty všech koeficientů při neznámých konstantních i proměnných a jejich derivací, počínaje koeficientem a_1, c_1 a konče koeficientem $c_n = 1$, vyneseme do tabulky V. V oddíle pro $k = 0$ budou se měnit střídavě pouze znaménka. Hodnoty prvého oddílu přeneseme do všech dalších oddílů pro $k = 1 \div n$ a postupně vynecháme vždy jeden sloupec. Hodnoty příslušné části prvého oddílu pronásobíme s předepsanými hodnotami kombinací, což půjde velmi rychle, neboť v úhlopříčkách jsou hodnoty stejné. Každý sloupec potom sečteme, čímž dostaneme $C^*_{i,k}$. Tyto hodnoty v každém oddílu zvláště pronásobíme postupně odzadu s hodnotami počátečních podmínek funkce y a jejich derivací a sečteme. Tak dostaneme hodnoty V_i, které zaneseme do tabulky VI.

δ) Zintegrujeme konvolutorně funkce $\{z_0\}$ a funkce pravé strany diferenciální rovnice $\sum_{i=0}^{m} (d_i + b_i(t))\ x^{(i)}\}$, spočítáme hodnoty takto získané funkce v bodech 0, Δt až $q\ \Delta t$ a zapíšeme postupně do levého sloupce tabulky VI. Pronásobíme hodnoty $V_0, \ldots, V_{n-1}$ se stejnolehlými sloupci tabulky III a zapíšeme do stejnolehlých řádků a sloupců v tabulce VI. Takto získané hodnoty v jednotlivých řádcích sečteme a tím obdržíme hodnotu funkce $u_\varkappa$ v jednotlivých bodech. Tyto hodnoty přepíšeme do příslušného sloupce tabulky II nebo po vynásobení koeficientem $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{2}\, a_{n-1}}$ je-li $a_{n-1} =$ konst do tabulky I ($\overline{u}_{(\varkappa)}$).

Tímto jsme vypočetli všechny potřebné hodnoty pro tabulku I nebo II.

c) Vlastní výpočet integrálu diferenciální rovnice v tabulce I (II).

α) Do tabulky zapíšeme hodnotu $y_{(0)} = u_{(0)}$ a touto hodnotou vynásobíme čísla $A_{0(0)}, \ldots, A_{n-1(0)}$. Takto získanými čísly pronásobíme tabulku $\bar{z}_{l(\mu)}$ $(\bar{z}_{l(\mu)})$ a hodnoty jednotlivých součinů zapíšeme do stejnolehlých řádek a sloupců v části pod $y_{(0)}$. Postup je obdobný jako při výpočtu integrálu diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, pouze s tím rozdílem, že zde jde o vícesloupcové pronásobení. Sečteme hodnoty celého prvého řádku od svislé silné čáry, čímž získáme hodnotu $y_{(1)}$, kterou zapíšeme do vedlejšího oddílu v tabulce I (v tabulce II obdržíme sečtením řádky hodnotu $y^*_{(1)}$, kterou vynásobíme ještě hodnotou $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{2}\, a_{n-1(1)}}$ a zapíšeme do vedlejšího oddílu označeného $y_{(1)}$).

β) Hodnotou $y_{(1)}$ vynásobíme čísla $A_{0(1)}, \ldots, A_{n-1(1)}$ a takto získanými součiny pronásobíme opět tabulku $\bar{z}_{l(\mu)}$ $(z_{l(\mu)})$ a výsledky zapíšeme do stejnolehlých sloupců a řádek posunutých o jednu dolů. Provedeme součet druhého řádku od silné svislé čáry, čímž dostáváme hodnotu $y_{(2)}$, kterou obdobným způsobem zapíšeme do záhlaví sousedního oddílu, označeného $y_{(2)}$ v tabulce I. (V tabulce II obdržíme hodnotu $y^*_{(2)}$, kterou násobíme koeficientem $\dfrac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{2}\, a_{n-1(2)}}$, čímž dostáváme hodnotu integrálu $y_{(2)}$.) Tento postup opakujeme pro každou $\varkappa$-tou hodnotu pro určení hodnoty $\varkappa + 1$.

Postup úpravy rovnice pro numerickou integraci ukážeme na příkladě lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty. Mějme rovnici:

$$y''' + (c_2 + t^2 \cos t)\, y'' + (c_1 + 4t \cos t - 2t^2 \sin t)\, y' + [c_0 + (2 - t^2) \cos t - \\ - 4t \sin t]\, y = f(t)\,.$$

Pro počáteční podmínky

$$y(0) = 1\,, \quad y'(0) = y''(0) = 0$$

lze ji přepsat do operátorového tvaru pomocí tabulek IV a V. Pro funkce $a_i(t)$ platí podle tabulky IV

		$(2 - t^2) \cos t - 4t \sin t$
	$4t \cos t - 2t^2 \sin t$	$-(4 \cos t - 4t \sin t - 4t \sin t - 2t^2 \cos t)$
$t^2 \cos t$	$-2(2t \cos t + t^2 \sin t)$	$2 \cos t - 2t \sin t - 2t \sin t - t^2 \cos t$
$t^2 \cos t$	0	0

a pro počáteční hodnoty dle tabulky V

		$0 + c_1$
	$0 + c_2$	0
$c_3 = 1$	c_2	c_1
$V_0 = c_1\, y(0)$		

	$0 + c_2$
$c_3 = 1$	c_2
$V_1 = c_2\, y(0)$	

$c_3 = 1$
$V_2 = y(0)$

Diferenciální rovnice bude tedy znít v operátorovém tvaru s vypočtenými hodnotami a funkcemi

$$(s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0)\{y\} + s^2\{t^2 \cos t y\} = \\ = \{f(t)\} + (c_1 + s c_2 + s^2)\, y(0)\,.$$

Nalezněme funkci příslušející operátoru

$$\frac{1}{s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0} = \{z\}$$

a násobme celou rovnici tímto operátorem. Tím dostáváme

$$\{y\} = -\{z_2\}\{t^2 \cos ty\} + \{z\}\{f(t)\} + \\ + y(0)(c_1\{z\} + c_2\{z_1\} + \{z_2\}),$$

kde $\{z_1\}$ a $\{z_2\}$ je prvá a druhá derivace funkce $\{z\}$, (pro niž jsou počáteční podmínky $z(0)$ a $z_1(0)$ nulové, jak tvrdí věta 3).

Tuto rovnici lze již snadno numericky integrovat použitím uvedených tabulek.

Na jednoduchém příkladě ukážeme číselný výpočet odezvy na jednotkový impuls.

Určeme odezvu na jednotkový impuls u regulačního členu, jehož funkce je popsána diferenciální rovnicí

$$y'' + \left(\frac{3}{2} - \frac{t^2}{4}\right) y = f(t) = x$$

při nulových počátečních podmínkách $y(0) = y'(0) = 0$ po jednotkovém impulsu.

V operátorovém tvaru rovnice zní

$$\left(s^2 + \frac{3}{2}\right)\{y\} - \left\{\frac{t^2}{4}\, y\right\} = 1\,,$$

z čehož

$$\{y\} = \frac{1}{s^2 + \frac{3}{2}}\left(1 + \left\{\frac{t^2}{4}\, y\right\}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right\}\left(1 + \left\{\frac{t^2}{4}\, y\right\}\right).$$

Protože $a_1 = 0$ použijeme tabulky I, v níž bude platit pro velikost intervalu

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\pi}{6} = 0{,}427$$

a dále

$$\bar{z}_{(\varkappa)} = z_{(\varkappa)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin(30^\circ . \varkappa)\,.\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}\sin(30^\circ . \varkappa)\,,$$

$$A_{y(\varkappa)} = \varkappa^2 . \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\pi}{6}\right)^2}{4} = \varkappa^2 . 0{,}0456\,,$$

$$\bar{u}_{(\varkappa)} = u_{(\varkappa)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin(30^\circ . \varkappa)\,.$$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		$y_{(0)} = 0$	0,408	0,710	0,846	0,813	0,665	0,480	0,292	0,147	0,035
		$A_{(0)} = 0$	0,046	0,183	0,411	0,731	1,144	1,646	2,24	2,93	
$z_0 = 0$	$u_{(0)} = 0$	$A_{(0)}y_{(0)} = 0$	0,0186	0,130	0,345	0,596	0,769	0,790	0,654	0,430	
0,175	0,408	0									
0,303	0,707	0	0,003								
0,349	0,817	0	0,006	0,023							
0,303	0,707	0	0,007	0,039	0,060						
0,175	0,408	0	0,006	0,045	0,102	0,104					
0	0	0	0,003	0,039	0,125	0,180	0,133				
−0,175	−0,408	0	0	0,023	0,102	0,208	0,229	0,138			
−0,303	−0,707	0	−0,003	0	0,060	0,180	0,265	0,238	0,114		
−0,348	−0,817	0	−0,006	−0,023	0	0,104	0,229	0,275	0,198	0,075	

9.5. Zpřesnění výpočtové methody

V mnohých případech technické praxe nepostačí vyčíslení konvolutorního integrálu methodou lichoběžníkovou a je nutno přistoupit k metodám přesnějším. Zpřesnění výpočtu se dosáhne numerickou aproximací konvolutorního integrálu s větší přesností na základě Stierlingovy formule. Uvedeme zde znění tabulky pro výpočet konvolutorního integrálu pomocí pravidla Simpsonova a tříosminového, které mají přibližně stejnou přesnost [7 a 8].

Při výpočtu prvé hodnoty $y_{(1)}$ je nutno užít pravidla lichoběžníkového, při výpočtu druhé hodnoty (ve druhém řádku) Simpsonova, ve třetím tříosminového a dále ve všech dalších sudých řádcích Simpsonova pravidla a ve všech dalších lichých pro prvé tři hodnoty tříosminového a dále Simpsonova. V tabulce násobíme proto hodnotu v každém poli ještě příslušným koeficientem, udávajícím váhu jednotlivým součinům.

Schema výpočtové tabulky podává tabulka VII. Od řádku čtvrtého se již koeficienty pravidelně mění a koeficient pro výpočet $y_{(i)}$ z $y^*_{(i)}$ má již stálý tvar. Funkce s pruhem zde však nelze zavést. Tato tabulka je sestavena pro diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. V případě proměnných koeficientů se při zpřesněném výpočtu v tabulce II objeví v n-sloupci příslušející hodnotě $y_{(i)}$ v každém řádku koeficienty z tabulky VII pro odpovídající hodnoty $y_{(i)}$.

9.6. Numerický výpočet odezvy uzavřené smyčky

Tabulka I a II podává numerický výpočet otevřené smyčky regulační soustavy, která je popsána lineární diferenciální rovnicí s proměnnými koeficienty. Soustavu můžeme schematicky znázornit v blokovém schematu dle obr. 1.

Obr. 1.

Předpokládejme, že smyčku rozpojené soustavy uzavřeme přes lineární zesilovač o koeficientu zesílení K a hledejme, jak se změní postup výpočtu v tabulkách. V blokovém schematu dle obr. 2 jsou vlastnosti mezi vstupní

Obr. 2.

funkcí x^* a výstupní y popsány diferenciální rovnicí

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{*(i)}, \tag{23}$$

kde pro vstupní funkci x^* platí

$$x^* = x - Ky. \tag{24}$$

Vztah mezi funkcí x a výstupní y uzavřené regulační smyčky bude, jak plyne z rovnic (23) a (24), pro $m < n$

$$\sum_{i=0}^{n} [a_i(t) + Kb_i(t)]\, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}, \quad \begin{pmatrix}\text{pro } i > m \\ \text{je } b_i \equiv 0\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Označme obdobně s větou 2

$$\sum_{i=k}^{m-1} [a_i^{(i-k)} + Kb_i^{(i-k)}](-1)^{i-k}\binom{i}{k} = A_k^* \tag{26}$$

pak platí ve zcela stejném znění celá předchozí výpočtová methoda, a tedy i tabulky I až VII, jen s tím rozdílem, že místo A_k se vynášejí hodnoty A_k^* dané výrazem (26).

9.7. Numerický výpočet bodů odezvy regulační soustavy s nelineárními členy

Při řešení integrálu obyčejné lineární diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty jsou funkce $A_k(t)$, resp. $A_k^*(t)$ a $n(t)$ v tabulce I až VII známý, a tedy předem vypočitatelné. Základní myšlenkou dalšího výpočtu je uvažovat nelineární diferenciální rovnici jako nehomogenní lineární, po případě s nekonstantními koeficienty, kde funkce času na pravé straně nebudou již známými explicitními funkcemi času t, avšak také známými nelineárními funkcemi hledaných proměnných a jejich derivací. Funkce času na pravé straně tedy připodobníme nelineárním funkcím hledaných proměnných.

Tím tedy převádíme nelineární diferenciální rovnice na rovnice lineární s jistými časovými funkcemi, jejichž hodnoty postupně vypočteme z hodnot hledaného integrálu a jeho derivací.

Je tedy nutno určit vždy $\varkappa + 1$ hodnotu $y_{(\varkappa+1)}$ pomocí známých předchozích hodnot $y_{(0)}, \ldots, y_{(\varkappa)}$ a jejich derivací a z nich hodnoty koeficientů diferenciální rovnice, jež jsou jejich funkcemi.

V dalších úvahách předpokládejme diferenciální rovnici tvaru (16) rozšířenou o nelineární člen tohoto tvaru:

$$g_\alpha(y, y', \ldots, y^{(\alpha)}; t), \quad \alpha < n,$$

kde α je řád nejvyšší derivace obsažené v nelineární funkci. O nelineární funkci $g_\alpha(y, \ldots, y^{(\alpha)}; t)$ předpokládejme, že je takovou nelineární funkcí všech svých argumentů, že zaručuje splnění existenčních podmínek pro jednoznačný spojitý integrál $y(t)$ dané diferenciální rovnice na určitém časovém intervalu $0 \leq t \leq T$ při předepsaných počátečních podmínkách.

O nelineární funkci $h_\beta(x, \ldots, x^{(\beta)}; t)$ předpokládejme, že pro libovolnou spojitou omezenou funkci času i ve všech svých derivacích $x, \ldots, x^{(\beta)}$ je funkce $h_\beta(x; x^{(\beta)}; t)$ jednoznačnou, alespoň po částech spojitou omezenou funkcí času.

Nejdříve vyřešíme nejjednodušší případ, kdy $\alpha = 0$. Rovnice má tvar

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} + g_0(y, t) = \\ = \sum_{i=0}^{m} d_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} b_i(t) x^{(i)} + h_\beta(x, \ldots, x^{\beta}; t) \tag{27}$$

a v operátorovém tvaru (lineární členy upravíme podle vzorců, uvedených při výkladu numerického řešení lineárních diferenciálních rovnic s proměnnými koeficienty)

$$\{y\} = -\sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\}\{A_k y\} - \{z\}\{g_0(y; t)\} + \\ + \{z\}\{\sum_{i=0}^{m} (d_i + b_i(t))\, x^{(i)} + h_\beta(x, \ldots, x^{(\beta)}; t)\} + \\ + y(0)\{z_{n-1}\} + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} C^*_{l,k} y^{(l-k-1)}(0)\, \{z_k\}\,. \tag{28}$$

V případě, že rovnice (27) je řádu $n \geqq 2$, pak funkce $\{z\}$ pro $t = 0$ má hodnotu nula a tím v rovnici pro výpočet hodnoty integrálu $y_{(\varkappa)}$ odpadne hodnota funkce $g_0(y, t)_{(\varkappa)}$ obsahující neznámé. Výpočet se opět velmi snadno sestaví do tabulky obdobné tabulce I a II. Oddíly v těchto tabulkách pro každou hodnotu $y_{(\varkappa)}$ se rozšíří ještě o sloupec hodnot nelineární funkce $g_0(y, t)$, jejíž hodnota se určí na základě vypočtené velikosti $y_{(\varkappa)}$ a pronásobí se se sloupcem $z_{s(\varkappa)}$. Hodnoty $u_{(\varkappa)}$ jsou rovněž zvětšeny o $\{z\}\{h_\beta\}_{(\varkappa)}$.

Je-li diferenciální rovnice (27) prvého řádu, komplikuje se výpočet pouze tím, že z každého součtu hodnot $y^*_{(\varkappa)}$ je nutno $y_{(\varkappa)}$ vypočítávat, což podle charakteru funkce g_0 může být pracnou úlohou. Postup výpočtu pro tento speciální případ objasníme na obecnějším případě.

K numerickému řešení hodnot integrálu obyčejné diferenciální rovnice, která obsahuje nelineární člen g_α na levé straně, je třeba vypočítat také všechny derivace $y^{(\sigma)}$ až do řádu α vystupující v této funkci. Abychom snížili řád nejvyšší derivace ve členu g_α a řešení tak usnadnili, pokusme se integrovat samotnou tuto funkci nebo některou její část. Podaří-li se nalézt takový integrál, pak se rovnice upraví do operátorového tvaru podle věty 1 v případě, že neobsahuje explicitně vyjádřený čas, a podle věty 2, jestliže integrál je ještě násoben explicitní funkcí času.

Na jednoduchém příkladě ukážeme snížení nejvyšších derivací u nelineární funkce $g_\alpha = g_3$.

Mějme funkci

$$g_3 = y'''y(3y + 2c) + y''6y'(3y + c) + y'(7y' + 3y^2 + 2by) + y^3\,.$$

Po přepsání do operátorového tvaru a postupnými běžnými úpravami dostaneme pomocí vět 1 a 2

$$\{g_3\} = (s + s^2)\{y^3 + by^2\} + \{y'^2\} + \{y^3\} - (1 + s^2)(y^3(0) + by^2(0)) - \\ - s(3y^2(0)\, y'(0) + 2by(0)\, y'(0)) - (6y(0)y'^2(0) + 3y^2(0)y''(0) + 2by'^2(0) + \\ + 2by(0)y''(0))\,.$$

Tímto způsobem se podařilo snížit funkci $\{g_3\}$ na $\{g_1^*\}$, neboť funkce g_3 se skládá z několika totálních diferenciálů. Tímto snížením nelineární funkce se podstatně zkrátil a zjednodušil celý výpočtový postup a zvýšila přesnost výpočtové methody.

Tento postup není ovšem vždy možný a pak je nutno počítat s funkcí $\{g_\alpha\}$ přímo.

Mějme obyčejnou nelineární diferenciální rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} + g_\alpha(y, \ldots, y^{(\alpha)}; t) = \\ = \sum_{i=0}^{m} d_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\, x^{(i)} + h_\beta(x, \ldots, x^{(\beta)}; t)\,. \tag{29}$$

V této rovnici oddělíme lineární členy s konstantními koeficienty od členů s koeficienty proměnnými a od nelineární funkce, a každou skupinu těchto členů budeme řešit rozdílným způsobem.

Přepišme celou rovnici do operátorového tvaru za předpokladu, že

$$\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} s^i c_i} = \{z\}\,.$$

Pak obdržíme diferenciální rovnici podle známých úprav ve tvaru

$$\{y\} = -\sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\}\{A_k y\} - \{z\}\{g_\alpha\} + \{u\}\,, \tag{30}$$

kde

$$\{u\} = \{z\}\{\sum_{i=0}^{m} (d_i + b_i)\, x^{(i)} + h_\beta\} + y(0)\{z_{n-1}\} + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=k+1}^{n-1} C^*_{l,k} y^{(l-k-1)}(0)\, \{z_k\}\,. \tag{31}$$

Pokusme se snížit stupeň $\{g_\alpha\}$ nalezením úplného diferenciálu některého členu nebo skupiny členů v této funkci.

Předpokládejme, že se podaří snížit funkci $g_\varkappa$ v rovnici (30) o stupeň ϱ, kde $0 \leqq \varrho \leqq \varkappa$.

Nechť tedy podle věty 1 platí

$$\{g_\varkappa\} = s^\varrho\{g^*_{\varkappa-\varrho}\} + \{g^{**}_{\varkappa-\varrho}\} - \sum_{i=0}^{\varrho-1} s^i g^{*(\varrho-1-i)}_{\varkappa-\varrho} . \tag{32}$$

Dosaďme předpokládaný vztah (32) do rovnice (30); dostaneme

$$\{y\} = -\sum_{k=0}^{n-1} \{z_k\}\{A_k y\} - \{z_\varrho\}\{g^*_{\varkappa-\varrho}\} - \{z\}\{g^{**}_{\varkappa-\varrho}\} + \{u^*\} , \tag{33}$$

kde

$$\{u^*\} = \{u\} - \sum_{i=0}^{\varrho-1} g^{*(\varrho-1-i)}_{\varkappa-\varrho}\{z_i\} . \tag{34}$$

K určení hodnot integrálů diferenciální rovnice (33) v daných intervalech Δt vyčíslením konvolutorních integrálů ve vhodných tabulkách musíme také znát hodnoty všech derivací funkce $\{y^{(\sigma)}\}$ pro $\sigma = 0$ až $\varkappa - \varrho$. To znamená, že vedle výpočtu hodnot funkce $\{y\}$ vyčíslením konvolutorního integrálu je nutno ještě vypočítat obdobným způsobem hodnoty derivací, které vystupují v nelineárních funkcích.

Pro funkci $\{y^{(\sigma)}\}$ odvodíme nejrychleji výpočtový vzorec z rovnice (33) po násobení operátorem s^σ. Jelikož nás zajímají jen hodnoty této funkce a nikoliv její počáteční podmínky, stačí pouze stanovit derivaci řádu σ pro všechny funkce a počáteční podmínky vynechat. Pro součiny $s^\sigma\{z_k\}$ podle věty 1 a 3 platí

$$s^\sigma\{z_k\} = \{z_{k+\sigma}\} - \sum_{i=0}^{k+\sigma-n} s^i z^{(0)}_{k+\sigma-i-1} .$$

Okrajové podmínky jsou nenulové jen potud, pokud $k + \sigma - i - 1 \geqq n - 1$
Z této podmínky plyne omezení sčítacích mezí. Musí být $i \leqq k + \partial - n$ a počáteční podmínky funkce $\{z\}$ přicházejí tedy v úvahu jen, je-li $k + \sigma \geqq n$.

Z rovnice (33) dostáváme

$$\begin{aligned}\{y^{(\sigma)}\} = &-\sum_{k=0}^{n-1} \{z_{k+\sigma}\}\{A_k y\} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k+\delta-n} s^i z^{(0)}_{k+\delta-i-1}\{A_k y\} - \\ &- \{z_\sigma\}\{g^{**}_{\varkappa-\varrho}\} - \{z_{\varrho+\sigma}\}\{g^*_{\varkappa-\varrho}\} + \{u^{*(\sigma)}\} .\end{aligned} \tag{35}$$

Z předpokládaných mezí pro sčítací indexy plyne

$$\varrho + \sigma \leqq n - 1$$

a v součinu $\{z_\varrho + \sigma\}\{g^*_{\varkappa-\varrho}\}$ se okrajové podmínky nevyskytnou.

V rovnici (35) je nutno upravit členy do tvaru

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k+\sigma-n} s^i z^{(0)}_{k+\sigma-i-1}\{A_k y\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k+\sigma-n} z^{(0)}_{k+\sigma-i-1}\left\{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} A_k^{(i-j)} y^{(j)}\right\} .\end{aligned} \tag{36}$$

Ze součtu plyne, že $0 \leqq j \leqq \sigma - 1$. Jest tedy nutné znát pro určení derivace řádu σ v bodě $\varkappa$, t. j. $y^{(\sigma)}_{(\varkappa)}$ všechny derivace od nulté až po $\sigma - 1$ v bodě $\varkappa$.

Po dosazení výrazu (36) do rovnice (35) dostáváme konečný vzorec pro určení derivace řádu σ

$$\begin{aligned}\{y^{(\sigma)}\} = &-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\{z_{k+\sigma}\}\{A_k y\} - \sum_{i=0}^{k+\sigma-n} z^{(0)}_{k+\sigma-i-1}\left\{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} A_k^{(i-j)} y^{(j)}\right\}\right) - \\ &- \{z_\sigma\}\{g^{**}_{\alpha-\varrho}\} - \{z_{\varrho+\sigma}\}\{g^*_{\alpha-\varrho}\} + \{u^{*(\sigma)}\} .\end{aligned} \tag{37}$$

Z výrazu (37) je zřejmé, že lze obecně řešit uvedenými methodami každý případ. Lineární členy s proměnnými koeficienty však komplikují značně výpočet derivací a schematické tabulky, nejsou již dostatečně přehledné. Sestavíme proto výpočtové tabulky v nichž nebudou lineární členy s proměnnými koeficienty vystupovat samostatně, ale budou zahrnuty do nelineární funkce g_α, jejíž řád vhodně snížíme. Tabulka respektující lineární členy vznikne samostatně vhodně upravenou kombinací tabulek II a VIII. Mějme tedy diferenciální rovnici, z které v operátorovém tvaru po úpravě vypočteme derivace $\{y^{(\sigma)}\}$ ve tvaru

$$\{y^{(\sigma)}\} = -\{z_\sigma\}\{g^{**}_{\alpha-\varrho}\} - \{z_{\varrho+\sigma}\}\{g^*_{\alpha-\varrho}\} + \{u^{*(\sigma)}\} , \tag{37a}$$

kde

$$\begin{aligned}\{u^{*(\sigma)}\} = &\{z_\sigma\}\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i)\, x^{(i)} + h_\beta\} + \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=l+1}^{n} c_i y^{(i-l-1)}(0)\{z_{l+\sigma}\} \\ &- \sum_{l=0}^{\varrho-1} g^{(\sigma-1-l)}_{\alpha-\varrho}(0)\{z_{l+\sigma}\} , \quad \sigma = 0, 1, \ldots, \alpha - \varrho .\end{aligned} \tag{38}$$

Hodnoty integrálů se opět numericky vypočtou z rovnice (37a) pomocí intervalu Δt obdobně jako v případě lineárních rovnic, je-li $\alpha < n - 1$, jak ukazuje vzorec (39), přičemž celý výpočet lze sestavit do vhodné tabulky.

Po vyčíslení obdržíme rovnici

$$\begin{aligned}y^{(\sigma)}_{(\varkappa)} = &\, u^{*(\sigma)}_{(\varkappa)} - \tfrac{1}{2}(z_{\sigma(\varkappa)} g^{**}_{\alpha-\varrho(0)} + z_{\varrho+\sigma(\varkappa)} g^*_{\alpha-\varrho(0)}) - \\ &- \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1}(z_{\sigma(\varkappa-\nu)} g^{**}_{\alpha-\varrho(\nu)} + z_{\varrho+\sigma(\varkappa-\nu)} g^*_{\alpha-\varrho(\nu)}) ,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, \alpha - \varrho \qquad \text{pro} \quad \alpha < n - 1 ,$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, n - 2 - \varrho \quad \text{pro} \quad \alpha = n - 1 .$$

Schematisovaný výpočet rovnice (39) je uveden na tabulce VIII. Z každé řádky vypočítáváme sečtením všech hodnot jednu derivaci a tedy postupně hodnoty $y_{(\varkappa)}, \ldots, y_{(\varkappa)}^{(\lambda-\varrho)}$, které přepíšeme do záhlaví dalšího oddílu. Pomocí takto nalezených hodnot funkce a jejich derivací určíme příslušnou hodnotu potřebných funkcí $g^{**}_{\lambda-\varrho(\varkappa)}$ a $g^{*}_{\lambda-\varrho(\varkappa)}$. Hodnoty funkce $u^{*}_{(\varkappa)}$ vypočteme na tabulce IX.

Na tabulce VIII jsou podle rovnice (39) uvedeny dvě funkce nelineární, kterých může býti ovšem i více a různého řádu.

V případě, že $\lambda = n - 1$ je nutno vzorec (39) modifikovat pro výpočet derivace $y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)}$, neboť $z_{n-1(0)} \neq 0$ (jak plyne z věty 3) a ve výpočtu se objeví hodnota nelineární funkce $g^{*}_{n-1-\varrho(\varkappa)}$.

Vzorec pro výpočet hodnot derivace tedy zní

$$y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)} = u_{(\varkappa)}^{*(n-1-\varrho)} - \tfrac{1}{2}(z_{n-1-\varrho(\varkappa)} g^{**}_{n-1-\varrho(0)} + z_{n-1(\varkappa)} g^{*}_{n-1-\varrho(0)}) -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1} (z_{n-1-\varrho(\varkappa-\nu)} g^{**}_{n-1-\varrho(\nu)} + z_{n-1(\varkappa-\nu)} g^{*}_{n-1-\varrho(\nu)}) - \tfrac{1}{2} z_{n-1(0)} g^{*}_{n-1-\varrho(\varkappa)} . \quad (39a)$$

Jestliže nelineární funkce $g^{*}_{n-1-\varrho}$ je ve své nejvyšší derivaci, t. j. v proměnné $y^{(n-1-\varrho)}$ lineární, pak se dá hodnota $y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)}$ z rovnice (39a) vypočítat přímo, neboť jsou známy hodnoty všech ostatních proměnných v nelineární funkci. Můžeme určit hodnotu

$$G_{(\varkappa)} = \frac{g^{*}_{n-1-\varrho(\varkappa)}}{y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)}} .$$

Pak

$$y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} G_{(\varkappa)}} [u_{(\varkappa)}^{*(n-1-\varrho)} - \tfrac{1}{2}(z_{n-1-\varrho(\varkappa)} g^{*}_{n-1-\varrho(0)} +$$
$$+ z_{n-1(\varkappa)} g^{*}_{n-1-\varrho(0)}) - \sum_{\nu=1}^{\varkappa-1} (z_{n-1-\varrho(\varkappa-\nu)} g^{**}_{n-1-\varrho(\nu)} + z_{n-1(\varkappa-\nu)} g^{*}_{n-1-\varrho(\nu)})] = \quad (41)$$

$= \dfrac{1}{1 + \frac{\Delta t}{2} G_{(\varkappa)}}$ krát součet řádky označené!*) na tabulce VIII).

Je-li však funkce $g^{*}_{n-1-\varrho(\varkappa)}$ závislá na své nejvyšší derivaci $y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)}$ nelineárně, buď ve tvaru polynomu nebo nějaké transcendentní funkce, je nutno vypočítat hodnotu této derivace nějakou aproximativní methodou. Na př. dosadíme do funkce $g^{*}_{n-1-\varrho}$ hodnotu $y_{(\varkappa-1)}^{(n-1-\varrho)}$ a sečtením řádky na tabulce VIII určíme nultou aproximaci hodnoty $y_{(\varkappa)}^{(n-1-\varrho)}$. Tuto nultou aproximaci dosadíme do funkce $g^{*}_{n-1-\varrho}$ a sečtením hodnot tohoto řádku (!*)) na tabulce VIII určíme prvou aproximaci a postup můžeme opakovat až na libovolnou přesnost.

Předpokládejme, že pravá strana je lineární funkcí x a derivací $x^{(i)}$. V tomto případě lze počítat i s impulsovými funkcemi. Impulsová funkce zavedená na vstup příslušného regulačního prvku změní okamžitě počáteční hodnoty $y(0), \ldots, y^{(n)}(0)$ a tudíž též $g(0)$, s nimiž je nutno ve výpočtové tabulce VIII při vyčíslování rovnice (39) počítat.

Tyto nulové hodnoty po impulsu vypočítáme tak, že v rov. (30) a (35) necháme t limitovat zprava k nule $t \to +0$ a z takto získaných rovnic určíme potřebné nulové hodnoty.

Jako příklad vypočteme numericky odezvu na impuls $\{f(x)\} = 2$ u nelineárního regulačního prvku, který je popsán diferenciální rovnicí

$$y'' + y' + 2(y + y^3) = f(x)$$

při nulových počátečních podmínkách $y'(0) = y(0) = 0$.

Rovnice přepsána do operátorového tvaru zní

$$s^2\{y\} + s\{y\} + 2\{y\} + 2\{y^3\} = 2 .$$

α) Jako funkci $\{z\}$ volíme nejdříve funkci příslušející operátoru $\frac{1}{s^2} = \{t\}$

Pak

$$\underbrace{\{y\} = 2\{t\}}_{\{u\}} - \underbrace{\{2t + 1\}}_{\{z_{lin}\}}\{y\} - \underbrace{\{t\}}_{\{z_{nelin}\}}\{2y^3\}$$

Nelineární funkce g_0 je řádu 0 a není třeba ani počítat derivace. Funkce $\{z\}$ jsou v našem případě dvě, jedna pro lineární funkci $\{y\}$, kterou označíme $\{z_{lin}\}$, a jedna pro nelineární funkci $\{2y^3\}$ označenou $\{z_{nelin}\}$. Poněvadž pro nulovou hodnotu $z_{lin}(0) = 1$ zavedeme funkce s pruhem ve tvaru $\bar{z} = \dfrac{z}{1 + \frac{\Delta t}{2}}$, $\bar{u} = \dfrac{u}{1 + \frac{\Delta t}{2}}$.

Interval Δt volme 0,33. Hrubý výpočet je proveden na tabulce X a hodnoty vyneseny na obr. 3 (křivka α).

β) Za funkci $\{z\}$ volme

$$\{z\} = \frac{1}{s^2 + s + 2} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \{e^{-\frac{1}{2}t} \sqrt{\tfrac{4}{7}} \sin \sqrt{\tfrac{7}{4}}\, t\}$$

tedy

$$\{y\} = 2\{z\} - \{z\}\{2y^3\}$$

a volme stejný interval Δt. Výpočet je proveden na tabulce XI a křivka vynesena rovněž na obr. 3 (křivka β).

9.8. Regulační obvod uzavřené smyčky s nelineárním členem

Předpokládejme opět regulační obvod otevřené smyčky s nelineárním členem, jehož funkce je popsána nelineární diferenciální rovnicí. Jest určiti rovnici téhož obvodu, jestliže smyčku uzavřeme podle obr. 2, a to pro několik různých případů.

α) *Nelineární diferenciální rovnice* (27) *má lineární pravou stranu.* V diferenciální rovnici tvaru

$$\sum_{i=0}^{m} c_i y^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)\, y^i + g(y, y', \ldots, y_\alpha{}^{(\alpha)}) = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\, x^{*(i)} + \sum_{i=0}^{m} d_i x^{*(i)}\,. \tag{41}$$

je možno zavést zpětnou vazbu vztahem (24). Pro $m < n$ rovnice (41) po dosazení (24) zní

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i + a_i(t) + Kd_i + Kb_i(t))\, y^{(i)} + g_\alpha = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} d_i x^{(i)}\,. \tag{41a}$$

Rovnice popisuje přenos uzavřené smyčky. Zcela obdobně jako u obvodu s uzavřenou smyčkou, popsaného lineární diferenciální rovnicí s proměnnými koeficienty, změní se pouze koeficienty lineárních členů levé strany. Tento případ lze dále dobře řešit.

β) *Diferenciální rovnice* (24) *má pravou stranu nelineární.* Zavedením zpětné vazby vztahem (24) stane se vlivem nelinearity na vstupu rovnice na levé straně nelineární funkcí argumentů $y, y', \ldots$ a $x, x', \ldots$ čili bude záviset také na vstupní funkci a jejích derivacích.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} + \Phi(y, y', \ldots, y^{(n-1)}, x, x', \ldots, x^{(m)}; t) = \varphi(x, \ldots, x^{(m)})\,. \tag{42}$$

Rovnici (42) je nutno řešit případ od případu podle zadané vstupní funkce zvlášť. Vzhledem k závislosti funkce Φ rovněž na vstupních funkcích je regulační prvek popsaný rovnicí (42) velmi nevhodný.

γ) *Lineární regulační prvek má nelineární zesilovač ve zpětnovazební smyčce.* Nechť přenos lineárního regulačního prvku je popsán diferenciální rovnicí

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} d_i x^{(i)}\,; \quad m < n\,, \tag{43}$$

k němuž připojíme zpětnovazebně nelineární zesilovač (viz obr. 2) o charakteristice

$$\eta = K_1 \xi + K_2 \xi^3\,. \tag{44}$$

Na vstupu regulačního prvku působí jednak vstup do uzavřené smyčky x, jednak nelineárně zesílená zpětná vazba, kterou popisuje rovnice (44) čili funkce (45)

$$x^* = x - \eta = x - K_1\xi - K_2\xi^3 = x - K_1 y - K_2 y^3\,. \tag{45}$$

Dosazením rovnice (45) do (43) dostaneme diferenciální rovnici uzavřené smyčky ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} K_1 d_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} K_2 d_i (y^3)^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} d_i x^{(i)} \tag{46}$$

čili nelineární rovnici, kterou lze řešit operátorovými methodami. V operátorech Mikusińského dostane rovnice (46) tvar

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i + K_1 d_i)\, s^i\{y\} + \sum_{i=0}^{m} K_2 d_i s^i\{y^3\} = \sum_{i=0}^{m} d_i\{x^{(i)}\} + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=l+1}^{n} (c_i + K_1 d_i)\, s^l y_{(0)}^{(i-l-1)} + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=l+1}^{m} K_2 d_i s^l (y^3)_{(0)}^{(i-l-1)}\,. \tag{47}$$

Nechť funkce $\{z\}$ přísluší operátoru

$$\{z\} = [\sum_{i=0}^{n} (c_i + K_1 d_i)\, s^i]^{-1}\,,$$

pak

$$\{y\} = K_2 \sum_{i=0}^{m} d_i\{z_i\}\{y^3\} + \{z\}\{u\}\,, \tag{48}$$

kde

$$\{u\} = \{z\} \sum_{i=0}^{m} d_i\{x^{(i)}\} + \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=l+1}^{n} (c_i + K_1 d_i)\, y_{(0)}^{(i-l-1)}\{z_l\} + K_2 \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i=l+1}^{m} d_i (y^3)_{(0)}^{(i-l-1)}\{z_l\}\,.$$

Rovnice číslo (48) se opět řeší pomocí tabulky VIII.

85a

9.9. Závěr

Numerická methoda, uvedená v práci, umožňuje výpočet integrálu obyčejných diferenciálních lineárních rovnic s konstantními a časově proměnnými koeficienty a diferenciálních rovnic nelineárních. Má význam zejména pro řešení regulačních obvodů a jiných úloh z oboru regulační techniky. Výpočet integrálů rovnic je podán obecně a pro numerický výpočet speciálních případů jsou vypracovány tabulky, umožňující řešení s použitím nejelementárnější znalostí. Výsledky výpočtů jsou zatíženy chybou. Její přesné určení bude vyžadovat ještě další podrobnou analysu. Pro technickou praxi, kde potřebujeme řešit uvedené rovnice jednoduchým a rychlým způsobem, bude přesnost výpočtové methody ve většině případů postačující. Článek budiž námětem pro další theoretický a experimentální výzkum.

Literatura

[1] J. Mikusiňsky, Rachunek operatorów, Warszawa 1953.

[2] V. Doležal: Kurzweil: Mikusinského operátorový počet; Slaboproudý obzor č. 11, 1955.
1955.

[3] M. Šalamon, Laplaceova a Laplaceova-Wagnerova transformace, Souhrn prací o automatisaci, Praha 1955.

[4] K. W. Wagner, Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, Leipzig 1950.

[5] B. van der Pol, H. Bremmer, Operational Calculus Based on the Twosided Laplace Integral, Cambridge 1950 — ruský překlad 1952.

[6] V. A. Ditkin, P. I. Kuzněcov, Příručka operátorového počtu, Praha 1954.

[7] L. Collatz, Numerische Behandlung von Diferenzialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951 — ruský překlad Moskva 1953.

[8] A. N. Krylov, Lekcii o přibližennych vyčislenijach, Moskva-Leningrad 1950.

[9] A. M. Letov, Ustojčivosť nelinejnych regulirujemych sistom, Moskva 1955.

[10] V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic (český překlad z ruštiny), Praha 1950.

Tabulka XI

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		$g_{(0)} = 0$	0,54624	0,80654	0,74794	0,49150	0,19416	−0,05502	−0,22466	−0,30180	−0,29009	−0,23256	−0,14130	−0,04930
z	u	$f_{(0)} = 0$	0,32596	1,04930	0,83680	0,23740	0,01482	−0,00034	−0,02266	−0,05496	−0,05190	−0,02514	−0,00564	
0,09103	0,54624	0												
0,13936	0,83621	0	−0,02967											
0,14813	0,88877	0	−0,04542	−0,09551										
0,12702	0,76218	0	−0,04828	−0,14623	−0,07617									
0,08819	0,52921	0	−0,04140	−0,15543	−0,11661	−0,02161								
0,04407	0,26445	0	−0,02874	−0,13327	−0,12395	−0,03308	−0,00133							
0,00427	0,02558	0	−0,01436	−0,09253	−0,10629	−0,03516	−0,00203	+0,00003						
−0,02502	−0,15017	0	−0,00139	−0,04624	−0,07379	−0,03015	−0,00216	+0,00004	+0,00206					
−0,04138	−0,24831	0	+0,00815	−0,00448	−0,03687	−0,02083	−0,00185	+0,00005	+0,00315	+0,00500				
−0,04545	−0,27274	0	+0,01318	+0,02625	−0,00357	−0,01046	−0,00128	+0,00004	+0,00335	+0,00765	+0,00472			
−0,05989	−0,23936	0	+0,01481	+0,04342	+0,02093	−0,00101	−0,00064	+0,00003	+0,00287	+0,00814	+0,00723	+0,00228		
−0,02852	−0,17115	0	+0,01306	+0,04769	+0,03462	+0,00593	−0,00006	+0,00001	+0,00199	+0,00698	+0,00768	+0,00350	+0,00051	

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

Tabulka VIII

			$y_{(0)}, y_{(0)}', \dots, y_{(0)}^{(\alpha-\varrho)}$		$y_{(1)}, \dots, y_{(1)}^{(\alpha-\varrho)}$		$y_{(2)}, \dots, y_{(2)}^{(\alpha-\varrho)}$		$y_{(3)}, \dots, y_{(3)}^{(\alpha-\varrho)}$
			$g_{\alpha-\varrho(0)}^{**}$	$g_{\alpha-\varrho(0)}^{*}$	$g_{\alpha-\varrho(1)}^{**}$	$g_{\alpha-\varrho(1)}^{*}$	$g_{\alpha-\varrho(2)}^{**}$	$g_{\alpha-\varrho(2)}^{*}$	
$z_{0(1)}$	$z_{\varrho(1)}$	$u_{(1)}^{*}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{0(1)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\varrho(1)}$					
$z_{1(1)}$	$z_{\varrho+1(1)}$	$u_{(1)}^{*\prime}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{1(1)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\varrho+1(1)}$					
...	...	...	...	...					
$z_{\alpha-\varrho(1)}$	$z_{\alpha(1)}$	$u_{(1)}^{*(\alpha-\varrho)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\alpha-\varrho(1)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\alpha(1)}$	!*) viz pozn.				
$z_{0(2)}$	$z_{\varrho(2)}$	$u^{*}_{(2)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{0(2)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\varrho(2)}$	$-\|\|\cdot z_{0(1)}$	$-\|\|\cdot z_{\varrho(1)}$			
...	...	...	...	...	...	...			
$z_{\alpha-\varrho(2)}$	$z_{\alpha(2)}$	$u_{(2)}^{*(\alpha-\varrho)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\alpha-\varrho(2)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\alpha(2)}$	$-\|\|\cdot z_{\alpha-\varrho(1)}$	$-\|\|\cdot z_{\alpha(1)}$	!*)		
$z_{0(3)}$	$z_{\varrho(3)}$	$u_{(3)}^{*}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{0(3)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\varrho(3)}$	$-\|\|\cdot z_{0(2)}$	$-\|\|\cdot z_{\varrho(2)}$	$-\|\|\cdot z_{0(1)}$	$-\|\|\cdot z_{\varrho(1)}$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$z_{\alpha-\varrho(3)}$	$z_{\alpha(3)}$	$u_{(3)}^{*(\alpha-\varrho)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\alpha-\varrho(3)}$	$-\frac{1}{2}\cdot\|\|\cdot z_{\alpha(3)}$	$-\|\|\cdot z_{\alpha-\varrho(2)}$	$-\|\|\cdot z_{\alpha(2)}$	$-\|\|\cdot z_{\alpha-\varrho(1)}$	$-\|\|\cdot z_{\alpha(1)}$	!*)

Poznámka. Je-li $\alpha < n - 1$, pak součet každé řádky označené !*) se rovná hodnotě derivace $y_{(\alpha)}^{(\alpha-\varrho)}$ zcela analogicky jako u ostatních řádků. Je-li $\alpha = n - 1$, je nutno hodnotu derivace $y_{(\alpha)}^{(n-1-\varrho)}$ ze součtu každé řádky takto označené vypočítávat podle vzorce (40) nebo postupnými aproximacemi.

Tabulka IX

	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}$	V_ϱ	...	V_{n-1}	
$(\{z\}\cdot\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))\,x^{(i)} + h_\beta\})_{(1)}$	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}\cdot z_\varrho(\Delta t)$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}\cdot z_1(\Delta t)$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}\cdot z_{\varrho-1}(\Delta t)$	$V_\varrho z_\varrho(\Delta t)$	...	$V_{n-1} z_{n-1}(\Delta t)$	$u_{(1)}^{*}$
$(\{z\}\cdot\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))\,x^{(i)} + h_\beta\})'_{(1)}$	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}\cdot z_1(\Delta t)$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}\cdot z_2(\Delta t)$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}\cdot z_\varrho(\Delta t)$	$V_\varrho z_{\varrho+1}(\Delta t)$	...	$V_{n-1} z_n(\Delta t)$	$u_{(1)}^{*\prime}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$(\{z\}\cdot\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))\,x^{(i)} + h_\beta)_{(1)}^{(\alpha-\varrho)}$	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}\cdot z_{\alpha-\varrho}(\Delta t)$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}\cdot z_{\alpha-\varrho+1}(\Delta t)$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}\cdot z_{\varrho-1}(\Delta t)$	$V_\varrho z_\alpha(\Delta t)$	...	$V_{n-1}\cdot z_{n-1+\varrho+\alpha}(\Delta t)$	$u_{(1)}^{*(\alpha-\varrho)}$
$(\{z\}\cdot\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))\,x^{(i)} + h_\beta\})_{(2)}$	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}\cdot z_\varrho(2\Delta t)$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}\cdot z_1(2\Delta t)$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}\cdot z_{\alpha-1}(2\Delta t)$	$V_\varrho z_\varrho(2\Delta t)$	...	$V_{n-1} z_{n-1}(2\Delta t)$	$u_{(2)}^{*}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$(\{z\}\cdot\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))\,x^{(i)} + h_\beta)_{(2)}^{(\alpha-\varrho)}$	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}\cdot z_{\alpha-\varrho}(2\Delta t)$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}\cdot z_{\alpha-\varrho+1}(2\Delta t)$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}\cdot z_{\alpha-1}(2\Delta t)$	$V_\varrho z_\alpha(2\Delta t)$	...	$V_{n-1}\cdot z_{n-1+\varrho+\alpha}(2\Delta t)$	$u_{(2)}^{*(\alpha-\varrho)}$
$(\{z\}\cdot\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))\,x^{(i)} + h_\beta)_{(3)}$	$V_0 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-1)}\cdot z_\varrho(3\Delta t)$	$V_1 + g_{\alpha-\varrho(0)}^{(\varrho-2)}\cdot z_1(3\Delta t)$	...	$V_{\varrho-1} + g_{\alpha-\varrho(0)}\cdot z_{\varrho-1}(3\Delta t)$	$V_\varrho z_\varrho(3\Delta t)$	...	$V_{n-1} z_{n-1}(3\Delta t)$	$u_{(3)}^{*}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

Tabulka [illegible]

	$z_{0(\nu)} = z_{(\nu)}$	$z_{1(\nu)}$	$z_{2(\nu)}$	...	$z_{n-1(\nu)}$
	η	η'	η''	...	$\eta^{(n-1)}$
$z_{l(0)} = \eta_{(0)}{}^{(l)} \Delta t$	$z_{(0)}$	$z_{1(0)}$	$z_{2(0)}$	...	$z_{n-1(0)}$
$z_{l(1)} = \eta\, 2\Delta t^{(l)} \Delta t$	$z_{(1)}$	$z_{1(1)}$	$z_{2(1)}$	...	$z_{n-1(1)}$
$z_{l(2)} = \eta \Delta t^{(l)} \Gamma_k$	$z_{(2)}$	$z_{1(2)}$	$z_{2(2)}$	...	$z_{n-1(2)}$

Tabulka IV

					$a_{0(x)}$
				$a_{1(x)}$	$-a'_{1x}$
			a_2	$-2a'_{2(x)}$	$a''_{2(x)}$
		$a_{3(x)}$	$-3a_3'{}_{(x)}$	$3a''_{3(x)}$	$-a'''_{3(x)}$
	...	...	...	...	...
$a_{n-1(x)}$	...	$\pm\binom{n-1}{3} a_{n-1(x)}^{(n-4)}$	$\mp\binom{n-1}{2} a_{n-1(x)}^{(n-3)}$	$\pm\binom{n-1}{1} a_{n-1(x)}^{(n-2)}$	$\mp a_{n-1(x)}^{(n-1)}$
$A_{n-1(x)}$	...	$A_{3(x)}$	$A_{2(x)}$	$A_{1(x)}$	$A_{0(x)}$

Tabulka V

					$\binom{k}{k} a_{k+1}(0) + c_{k+1}$
				...	...
			$\binom{k}{k} a_{n-3}(0) + c_{n-3}$	...	$\binom{n-4}{k} a_{n-3}^{(n-4-k)}(0)$
		$\binom{k}{k} a_{n-2}(0) + c_{n-2}$	$\binom{k+1}{k} a'_{n-2}(0)$	...	$\binom{n-3}{k} a_{n-2}^{(n-3-k)}(0)$
	$\binom{k}{k} a_{n-1}(0) + c_{n-1}$	$\binom{k+1}{k} a'_{n-1}(0)$	$\binom{k+2}{k} a''_{n-1}(0)$	...	$\binom{n-2}{k} a_{n-1}^{(n-2-k)}(0)$
$c_n = 1$	$C^*_{n-1,k}$	$C^*_{n-2,k}$	$C^*_{n-3,k}$	...	$C^*_{k+1,k}$
$V_k = y^{(n-k-1)}(0) + \sum_{l=k+1}^{n-1} C^*_{l,k}\, y^{(l-k-1)}(0)$					

Tabulka VI

	$V_0 \frac{1}{\Delta t}$	$V_1 \frac{1}{\Delta t}$	...	$V_{n-1} \frac{1}{\Delta_t}$	$\Sigma_{\nu\text{-té řádky}} = u_{(\nu)}$	$\bar{u}_{(\nu)} = \dfrac{u_{(\nu)}}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1(\nu)}}$
$\{z\}\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))x^{(i)}\}_{(0)}$	$z_{(0)} V_0 \frac{1}{\Delta t}$	$z_{1(0)} V_1 \frac{1}{\Delta t}$	...	$z_{n-1(0)} V_{n-1} \frac{1}{\Delta t}$	$u_{(0)}$	$\bar{u}_{(0)}$
$\{z\}\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))x^{(i)}\}_{(1)}$	$z_{(1)} V_0 \frac{1}{\Delta t}$	$z_{1(1)} V_1 \frac{1}{\Delta t}$	...	$z_{n-1(1)} V_{n-1} \frac{1}{\Delta t}$	$u_{(1)}$	$\bar{u}_{(1)}$
...	...	...	...	...	...	...
$\{z\}\{\sum_{i=0}^{m}(d_i + b_i(t))x^{(i)}\}_{(K)}$	$z_{(K)} V_0 \frac{1}{\Delta t}$	$z_{1(K)} V_1 \frac{1}{\Delta t}$	...	$z_{n-1(K)} V_{n-1} \frac{1}{\Delta t}$	$u_{(K)}$	$\bar{u}_{(K)}$

Tabulka VII

		$y_{(0)} = u_{(0)}$	$y_{(1)} = \dfrac{y_{(1)}^*}{1 + \frac{\Delta t}{2} a_{n-1}}$	$\dfrac{y_{(2)}^*}{1 + \frac{\Delta t}{3} a_{n-1}}$	$\dfrac{y^*_{(3)}}{1 + \frac{3}{8} \Delta t\, a_{n-1}}$	$\dfrac{y^*_{(4)}}{1 + \frac{\Delta t}{3} a_{n-1}}$	$\dfrac{y^*_{(5)}}{1 + \frac{\Delta t}{3} a_{n-1}}$	$\dfrac{y^*_{(6)}}{1 + \frac{\Delta t}{3} a_{n-1}}$	$\dfrac{y^*_{(7)}}{1 + \frac{\Delta t}{3} a_{n-1}}$
$z_{(1)}$	$u_{(1)}$	$\frac{1}{2} y_{(0)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(1)}^*$						
$z_{(2)}$	$u_{(2)}$	$\frac{1}{3} y_{(0)} z_{(2)}$	$\frac{4}{3} y_{(1)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(2)}^*$					
$z_{(3)}$	$u_{(3)}$	$\frac{3}{8} y_{(0)} z_{(3)}$	$\frac{9}{8} y_{(1)} z_{(2)}$	$\frac{9}{8} y_{(2)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(3)}^*$				
$z_{(4)}$	$u_{(4)}$	$\frac{1}{3} y_{(0)} z_{(4)}$	$\frac{4}{3} y_{(1)} z_{(3)}$	$\frac{2}{3} y_{(2)} z_{(2)}$	$\frac{4}{3} y_{(3)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(4)}^*$			
$z_{(5)}$	$u_{(5)}$	$\frac{3}{8} y_{(0)} z_{(5)}$	$\frac{9}{8} y_{(1)} z_{(4)}$	$\frac{9}{8} y_{(2)} z_{(3)}$	$\frac{17}{24} y_{(3)} z_{(2)}$	$\frac{4}{3} y_{(4)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(5)}^*$		
$z_{(6)}$	$u_{(6)}$	$\frac{1}{3} y_{(0)} z_{(6)}$	$\frac{4}{3} y_{(1)} z_{(5)}$	$\frac{2}{3} y_{(2)} z_{(4)}$	$\frac{4}{3} y_{(3)} z_{(3)}$	$\frac{2}{3} y_{(4)} z_{(2)}$	$\frac{4}{3} y_{(5)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(6)}^*$	
$z_{(7)}$	$u_{(7)}$	$\frac{3}{8} y_{(0)} z_{(7)}$	$\frac{9}{8} y_{(1)} z_{(6)}$	$\frac{9}{8} y_{(2)} z_{(5)}$	$\frac{17}{24} y_{(3)} z_{(4)}$	$\frac{4}{3} y_{(4)} z_{(3)}$	$\frac{2}{3} y_{(5)} z_{(2)}$	$\frac{4}{3} y_{(6)} z_{(1)}$	$\Sigma = y_{(7)}^*$

Tabulka I

					$y_{(0)} = u_{(0)}$				$y_{(1)}$				$y_{(2)}$				$y_{(3)}$
					$A_{0(0)}$	$A_{1(0)}$	…	$A_{n-1(0)}$	$A_{0(1)}$	$A_{1(1)}$	…	$A_{n-1(1)}$	$A_{0(2)}$	$A_{1(2)}$	…	$A_{n-1(2)}$	
$\bar{z}_{0(\nu)}$	$\bar{z}_{1(\nu)}$	…	$\bar{z}_{n-1(\nu)}$		$\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}$	$\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}$	…	$\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}$	$A_{0(1)}y_{(1)}$	$A_{1(1)}y_{(1)}$	…	$A_{n-1(1)}y_{(1)}$	$A_{0(2)}y_{(2)}$	$A_{1(2)}y_{(2)}$	…	$A_{n-1(2)}y_{(2)}$	
$\bar{z}_{0(1)}$	$\bar{z}_{1(1)}$	…	$\bar{z}_{n-1(1)}$	$\bar{u}_{(1)}$	$-\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}\bar{z}_{0(1)}$	$-\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}\bar{z}_{1(1)}$	…	$-\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}\bar{z}_{n-1(1)}$									
$\bar{z}_{0(2)}$	$\bar{z}_{1(2)}$	…	$\bar{z}_{n-1(2)}$	$\bar{u}_{(2)}$	$-\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}\bar{z}_{0(2)}$	$-\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}\bar{z}_{1(2)}$	…	$-\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}\bar{z}_{n-1(2)}$	$-A_{0(1)}y_{(1)}\bar{z}_{n-1(1)}$	$-A_{1(1)}y_{(1)}\bar{z}_{1(1)}$	…	$-A_{n-1(1)}y_{(1)}\bar{z}_{n-1(1)}$					
$\bar{z}_{0(3)}$	$\bar{z}_{1(3)}$	…	$\bar{z}_{n-1(3)}$	$\bar{u}_{(3)}$	$-\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}\bar{z}_{0(3)}$	$-\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}\bar{z}_{1(3)}$	…	$-\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}\bar{z}_{n-1(3)}$	$-A_{0(1)}y_{(1)}\bar{z}_{0(2)}$	$-A_{1(1)}y_{(1)}\bar{z}_{1(2)}$	…	$-A_{n-1(1)}y_{(1)}\bar{z}_{n-1(2)}$	$-A_{0(2)}y_{(2)}\bar{z}_{0(1)}$	$-A_{1(2)}y_{(2)}\bar{z}_{1(1)}$	…	$-A_{n-1(2)}y_{(2)}\bar{z}_{n-1(1)}$	

Tabulka II

					$y_{(0)} = u_{(0)}$				$y_{(1)} = \dfrac{y^*_{(1)}}{1 + \dfrac{\Delta t}{2} a_{n-1(1)}}$				$y_{(2)} = \dfrac{y^*_{(2)}}{1 + \dfrac{\Delta t}{2} a_{n-1(2)}}$				$y_{(3)} = \dfrac{y^*_{(3)}}{1 + \dfrac{\Delta t}{2} a_{n-1(3)}}$
					$A_{0(0)}$	$A_{1(0)}$	…	$A_{n-1(0)}$	$A_{0(1)}$	$A_{1(1)}$	…	$A_{n-1(1)}$	$A_{0(2)}$	$A_{1(2)}$	…	$A_{n-1(2)}$	
$z_{0(\nu)}$	$z_{1(\nu)}$	…	$z_{n-1(\nu)}$		$\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}$	$\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}$	…	$\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}$	$A_{0(1)}y_{(1)}$	$A_{1(1)}y_{(1)}$	…	$A_{n-1(1)}y_{(1)}$	$A_{0(2)}y_{(2)}$	$A_{1(2)}y_{(2)}$	…	$A_{n-1(2)}y_{(2)}$	
$z_{0(1)}$	$z_{1(1)}$	…	$z_{n-1(1)}$	$u_{(1)}$	$-\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}z_{0(1)}$	$-\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}z_{1(1)}$	…	$-\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}z_{n-1(1)}$	$\Sigma = y^*_{(1)}$								
$z_{0(2)}$	$z_{1(2)}$	…	$z_{n-1(2)}$	$u_{(2)}$	$-\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}z_{0(2)}$	$-\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}z_{1(2)}$	…	$-\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}z_{n-1(2)}$	$-A_{0(1)}y_{(1)}z_{0(1)}$	$-A_{1(1)}y_{(1)}z_{1(1)}$	…	$-A_{n-1(1)}y_{(1)}z_{n-1(1)}$	$\Sigma = y^*_{(2)}$				
$z_{0(3)}$	$z_{1(3)}$	…	$z_{n-1(3)}$	$u_{(3)}$	$-\frac{1}{2}A_{0(0)}y_{(0)}z_{0(3)}$	$-\frac{1}{2}A_{1(0)}y_{(0)}z_{1(3)}$	…	$-\frac{1}{2}A_{n-1(0)}y_{(0)}z_{n-1(3)}$	$-A_{0(1)}y_{(1)}z_{0(2)}$	$-A_{1(1)}y_{(1)}z_{1(2)}$	…	$-A_{n-1(1)}y_{(1)}z_{n-1(2)}$	$-A_{0(2)}y_{(2)}z_{0(1)}$	$-A_{1(2)}y_{(2)}z_{1(1)}$	…	$A_{n-1(2)}y_{(2)}z_{n-1(1)}$	$\Sigma = y^*_{(3)}$

Tabulka X

			0		1		2		3		4		5		6		7		8		9
			$y_{(0)} = 0$		0,57142		0,83522		0,75360		0,47020		0,15843		−0,09520		−0,25810		−0,32260		−0,29997
$\bar{z}_{lin.}$	$\bar{z}_{nelin.}$	$\bar{u}$	$f_{(0)} = 0$			0,37316		1,16528		0,85594		0,20790		0,00794		−0,00172		−0,03438		−0,06676	
0,47618	0,09523	0,57142	0	0																	
0,66665	0,19047	1,14284	0	0	−0,27209	−0,03553															
0,85713	0,28571	1,71426	0	0	−0,38093	−0,07107	−0,39771	−0,11095													
1,04760	0,38094	2,28568	0	0	−0,48978	−0,10661	−0,55679	−0,22195	−0,35884	−0,08151											
1,23807	0,47618	2,85710	0	0	−0,59861	−0,14215	−0,71589	−0,33293	−0,50238	−0,16303	−0,22389	−0,01979									
1,42885	0,57142	3,42852	0	0	−0,70745	−0,17769	−0,87497	−0,44390	−0,64593	−0,24455	−0,31345	−0,03959	−0,07544	−0,00075							
1,61902	0,66665	3,99994	0	0	−0,81630	−0,21325	−1,03406	−0,55488	−0,78947	−0,32606	−0,40302	−0,05939	−0,10561	−0,00151	+0,04533	+0,00001					
1,80949	0,76189	4,57136	0	0	−0,92514	−0,24876	−1,19315	−0,66586	−0,93300	−0,40758	−0,49252	−0,07919	−0,13579	−0,00226	+0,06346	+0,00032	+0,12290	+0,00327			
1,99997	0,85713	5,14278	0	0	−1,03397	−0,28430	−1,35223	−0,77683	−1,07655	−0,48910	−0,58214	−0,09899	−0,16597	−0,00302	+0,08159	+0,00049	+0,17206	+0,00654	+0,15332	+0,00635	

II.

Hospodárné methody řešení regulačních obvodů

10. IMPULSNÍ MODELY

Ing. Dr Miroslav Šalamon

(ÚACH Nováky)

10.1. Úvod

Jednou z důležitých otázek theorie automatické regulace je i theorie nejvhodnějšího nastavení regulátoru, t. j. přizpůsobení regulátoru dané regulační soustavě a regulačnímu úkolu, a její ověření. O této problematice byla v poslední době vydána řada publikací [1], [2], [3], [4], [4a] a theoreticky můžeme dnes pokládat tuto otázku za uspokojivě vyřešenou. Až na směrnici Zieglera a Nicholse [5] o nejvhodnějším nastavení konstant regulátoru jsou všechny práce ryze theoretické a nebyly, pokud je nám známo, experimentálně potvrzeny. Aby bylo možno theoretické úvahy potvrdit, je nutno provést velikou řadu zkoušek regulačních pochodů. Pokud jsou tyto zkoušky prováděny přímo na regulovaných soustavách, jsou nákladné a je proto snahou použít při nich modelů regulovaných soustav, které umožní provedení zkoušek v laboratoři. Podobně i pro řešení mnohých úloh theorie automatické regulace je výhodné použít modelů, neboť je jimi podstatně zkracována výpočtářská práce.

Na model regulované soustavy jsou přitom kladeny některé speciální požadavky a to především co do rozsahu časových konstant modelovaných soustav, neboť při zkouškách skutečných regulátorů je nutné pracovat s nezkráceným časovým měřítkem a model regulované soustavy musí mít stejné časové konstanty jako soustava sama. Naproti tomu přesnost modelu nemusí být příliš veliká, v praxi se obvykle spokojujeme s přesností $\pm 5\%$.

Pokud omezíme své úvahy jen na statické soustavy, je jejich přechodová charakteristika nejčastěji vyjádřena vztahem

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\alpha_i(t-t_d)}\,, \tag{1}$$

kde A_0 je konečná hodnota regulované veličiny po jednotkové změně vstupní veličiny skokem, A_i a α_i jsou konstanty, n je řád soustavy a t_d její dopravní zpoždění. Mezi konstantami A_0 a A_i platí vztah

$$A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i = 0\,. \tag{2}$$

Pro výpočet stability regulačního pochodu a často i pro výpočet nejvhodnějších konstant regulátoru bývá přechodová charakteristika dále zjednodušována. Tak na př. je přechodová charakteristika tvaru (*1*) nahrazována přechodovou charakteristikou soustavy prvního řádu s časovou konstantou T a dopravním zpožděním t_d,

$$f_1(t) = A_0\left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{T_s}}\right), \tag{3}$$

poměry jsou při tom voleny tak, aby se tečna v bodě $t = t_d$ charakteristiky (*3*) ztotožnila s tečnou v inflexním bodě charakteristiky (*1*), viz obr. 1. Jindy je prováděna náhrada lomenou čarou *0, 1, 2, 3* (obr. 1), t. j. přechodová charakteristika je nahrazena přímkami

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq t \leqq t_d\,, \\ f(t) &= A_0 \frac{t}{T_s} \quad \text{pro} \quad t_d < t_d \leqq t + T_s\,, \\ f(t) &= A_0 \quad \text{pro} \quad T_s + t_d < t < \infty\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Snadno bychom se přesvědčili, že charakteristikám (*1*), resp. (*3*) odpovídají diferenciální rovnice soustav

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = \\ = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x\,, \end{aligned} \tag{5}$$

resp.

$$a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y = b_0 x(t - t_d)\,, \tag{6}$$

kde $x(t)$ je vstupní, $y(t)$ výstupní veličinou soustavy a hodnoty a_i a b_k jsou konstantami.

Pro modelování regulovaných soustav je možno použít všech soustav, popsaných diferenciálními rovnicemi typu (5), resp. (6), u kterých konstanty a_i a b_k v rovnici soustavy původní (díla) i modelu jsou stejné. Můžeme proto pro modelování užít soustav elektrických, hydraulických, pneumatických nebo tepelných, stejně jako analogických elektronických modelů a podobně. Soustavy elektrické se vyznačují jednoduchostí (bývají sestaveny z odporů a kondensátorů), jejich časové konstanty můžeme rychle a pohodlně měnit, nemůžeme však u nich dosáhnout dostatečně dlouhých časových konstant. Soustavy hydraulické, pneumatické a tepelné (podrobný seznam pramenů viz [6]) jsou dosti rozměrné a změny a přesná volba jejich časových konstant je obtížná. Analogické elektronické modely [7] jsou sice přesné a nastavení časových konstant je na nich přesné a pohodlné, tyto modely však vyžadují veliký počet stabilních stejnosměrných zesilovačů a jsou proto velmi nákladné. Uvedené modely regulovaných soustav nejsou proto vhodné pro rychlé zkoušky regulátorů v menších laboratořích a v provozech.

Uvedené nevýhody nemá dále popsaný impulsní model, využívající kvantového a paměťového účinku kondensátorů. Je i pro soustavy vyšších řádu jednoduchý a jeho časové konstanty je možno pohodlně a rychle měnit ve velmi širokém rozsahu. Na podobném principu je možno sestavit i model soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním, popsané diferenciální rovnicí (6), s přechodovou charakteristikou (3). Základním článkem těchto modelů je t. zv. impulsová soustava, kterou se v dalším budeme blíže zabývat. Okolnost, že oba druhy modelů pracují nespojitě a jejich přechodové charakteristiky jsou stupňové, není, jak ukážeme na příkladech, při práci s modely na závadu.

10.2. Impulsová kapacitní soustava

Uvažujme soustavu, vytvořenou sběrnou kapacitou C_1 a přenášecí kapacitou C_1 která je kontaktem j přepínána periodicky ze vstupního napětí $x(t)$ na sběrnou kapacitu C^1, kterou nabíjí na výstupní napětí $y(t)$ (viz obr. 2a). Kontakt j je periodicky přepínán na př. tak, že na počátku intervalu T je z polohy a přepnut do polohy b, ve které setrvá po dobu Δt, pak se vrací do polohy a a setrvá v ní do konce intervalu T, viz obr. 2b. Pokud zanedbáme svody, mění se napětí sběrné kapacity stupňovitě a je jak funkcí vstupního napětí $x(t)$, tak i počtu přepnutí k.

Protože výstupní napětí $y(t)$ se mění v okamžicích T, $2T$, $3T$, ..., je charakterisováno počtem přepnutí $k = 1, 2, 3, \ldots$ od počátku pokusu a můžeme je proto sledovat jako funkci počtu přepnutí, $y(k)$. Pro výstupní napětí bychom snadno odvodili vztah

$$y(k) - \frac{C_1}{C + C_1}\, y(k-1) = \frac{C}{C + C_1}\, x(k)\,, \tag{7}$$

kde $x(k)$ je vstupní napětí soustavy při k-tém přepnutí kontaktu j. Rovnice (7) je diferenční rovnicí soustavy. Byla-li soustava až času $t = 0$ ($k = 0$) v klidu, t. j. bez nábojů, a počne-li v tomto okamžiku působit konstantní napětí x_0 na jejím vstupu, bude se výstupní napětí měnit podle vztahu*)

*) Řešení diferenčních rovnic je podobné jako řešení rovnic diferenciálních. Pokud řešená rovnice je s konstantními koeficienty, použije při řešení s výhodou Laplaceovy nebo Laplace-Wagnerovy diferenční transformace [8].

$$y(k) = x_0(1 - e^{-\alpha k}) = x_0(1 - e^{-\alpha \frac{t}{T}})\,, \tag{8}$$

kde jsme označili

$$e^{-\alpha} = \frac{C_1}{C + C_1}\,, \quad \alpha = \ln\left(1 + \frac{C}{C_1}\right). \tag{9}$$

Vidíme, že tato soustava se chová podobně, jako spojitá soustava prvního řádu. Její časová konstanta je

$$T_s = \frac{T}{\alpha} = \frac{T}{\ln\left(1 + \dfrac{C}{C_1}\right)}\,, \tag{10}$$

kde T je doba intervalu mezi dvěmá přepnutími kontaktu j. Jediným rozdílem proti soustavě spojité je ta okolnost, že změna výstupního napětí je v tomto případě stupňová, t. j. její výstupní napětí je po úsecích spojitou funkcí času.

Závislost poměrné časové konstanty

$$\tau = \frac{T_s}{T} = \frac{1}{\ln\left(1 + \dfrac{C}{C_1}\right)}\,, \tag{11}$$

vyjádřené počtem period kontaktu j na poměru kapacit $\frac{C_1}{C}$ je na obr. 3. Vidíme, že pro $\frac{C_1}{C} > 10$ můžeme klást přibližně

$$\tau \doteq \frac{C_1}{C}\,, \quad T_s \doteq T\,\frac{C_1}{C}\,. \tag{12}$$

Výhody impulsové kapacitní soustavy jsou zřejmé: časovou konstantu můžeme ve velmi širokých mezích měnit poměrem kapacit C_1 a C a přepínací frekvence $f = \frac{1}{T}$ konstantu j. Volíme-li na př. přepínací frekvenci $f = 0{,}1$ 1/s, t. j. $T = 10$ s, je při poměru $\frac{C_1}{C} = 100$ (na př. $C_1 = 10\,\mu F$, $C = 0{,}1\,\mu F$) výsledná časová konstanta $T_s \doteq 1000$ s. Nevýhodou impulsové soustavy je ta okolnost, že napětí na kondensátoru C_1 (výstupní napětí) musíme měřit přístrojem bez spotřeby (na př. elektrostatickým nebo elektronkovým voltmetrem).

Doposud jsme předpokládali ideální kondensátory C a C^1. Má-li kondensátor C_1 svod R_1, t. j. je-li jeho časová konstanta $T_1 = C_1 R_1$, změní se stupňová přechodová charakteristika z výrazu (8) na

$$y_1(k) = x_0\,\frac{C}{C + C_1\left(1 - e^{-\frac{T}{T_1}}\right)}\left[1 - \left(\frac{C e^{-\frac{T}{T_1}}}{C + C_1}\right)^k\right]. \tag{13}$$

Vlivem svodu klesla časová konstanta soustavy na hodnotu

$$T_{s1} = \frac{T}{\dfrac{T}{T_1} + \ln\left(1 + \dfrac{C}{C_1}\right)}\,. \tag{14}$$

Současně klesá i zesílení soustavy, které bylo původně rovno jedné, na hodnotu

$$Z_{s1} = \frac{C}{C + C_1\left(1 - e^{-\frac{T}{T_1}}\right)}\,. \tag{15}$$

V obr. 4 je nakreslena závislost časové konstanty T_{s1} a zesílení Z_{s1} na poměru doby cyklu T přepínacího kontaktu a časové konstanty T_1 kondensátoru C_1, a to pro několik různých poměrů $\frac{C_1}{C}$. Vidíme, že minimální časová konstanta, kterou ještě u kondensátoru C_1 můžeme připustit, je asi $1000T$. Užíváme-li na příklad sběrné kapacity $C_1 = 10\ \mu F$ a minimální přepínací frekvence $f = 0{,}05$ 1/s ($T = 20$ s) je nejmenší přípustný svodový odpor kondensátoru C_1

$$R_1 = \frac{T_1}{C_1} = \frac{2\,.\,10^4}{10\,.\,10^{-6}} = 2\,.\,10^9 \text{ ohmů}\,.$$

Při menších hodnotách svodového odporu kvalita soustavy rychle klesá.

10.3. Impulsová statická soustava vyššího řádu

V praxi přicházející regulační soustavy jsou obvykle vyššího řádu a bývají vytvořeny seriovým nebo seriově-paralelním řazením soustav prvního řádu. Přitom setkáváme se se dvěma druhy členů soustavy: členy, které se navzájem zpětně neovlivňují (na př. dvě za sebou zapojené nádrže, ve kterých je vyrovnávána koncentrace určité látky — změna koncentrace v druhé nádrži neovlivňuje zpětně koncentraci v nádrži první) a členy, které se zpětně ovlivňují (na př. členy tepelné soustavy — změna teploty ohřívaného media zpětně působí na teplotu zdroje). Při modelování takových soustav musíme mít proto možnost vytvořit členy jak zpětně působící, tak i nepůsobící.

Přímým spojením dvou impulsových soustav prvního řádu podle obr. 5a získáme soustavu druhého řádu se zpětným působením. Soustavu druhého řádu bez zpětného působení získáme, vložíme-li mezi obě soustavy prvního řádu impedanční měniče *IM*, které při velmi vysoké vstupní impedanci dávají na výstupu napětí rovné napětí vstupnímu na malé impedanci (tedy vhodné zesilovače s úplnou negativní zpětnou vazbou), viz obr. 5b. Užití impedančních měničů je ovšem nákladné a při soustavách vyššího řádu ztratili bychom výhody jednoduchosti impulsové soustavy. Soustavu vyššího řádu můžeme však vytvořit též bez užití impedančních měničů (resp. jen s jedním impedančním měničem na výstupu soustavy), jestliže místo n přenášecích kondensátorů (n řád modelované soustavy) užijeme jediného přenášecího kondensátoru, který je během jedné periody přepnut ze vstupního napětí postupně na všechny sběrné kondensátory $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n}$, na př. ve spojení podle obr. 6. Řetězec kontaktů $a, b, \ldots, n$ je přepínán vhodným způsobem (na př. reléovým řetězcem $A, B, \ldots, N$) tak, že relé $A, B, \ldots, N$ (v obrázku nekreslená) spínají postupně za sebou a zůstanou přitažena až do konce periody. Takovým způsobem získáme model statické soustavy bez zpětného ovlivňování jednotlivých členů při užití jediného impedančního měniče na výstupu ze soustavy. Časové konstanty jednotlivých členů jsou opět určeny poměry $\frac{C_{1i}}{C}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a vztahem (10).

S ohledem na to, že při seriovém řazení soustav s rozdílnými časovými konstantami mizí účinek členů s malými časovými konstantami proti účinku členů s velkými časovými konstantami, je často výhodné volit v modelu časové konstanty jednotlivých, za sebou spojených členů stejné, t. j. v případě podle obr. 6 volit sběrné kapacity C_{1i} stejné, $C_{11} = C_{12} = \ldots = C_{1n} = C_1$. Takovou soustavu můžeme pak s přesností pro regulační účely vyhovující nahradit soustavou prvního řádu s časovou konstantou T_{sn} a fiktivním dopravním zpožděním t'_d podle obr. 1. Označíme-li T_{s1} časovou konstantu jednoho členu soustavy n-tého řádu, je časová konstanta náhradní soustavy T_{sn} a fiktivní dopravní zpoždění t'_d pro $n = 1, 2, \ldots, 6$ dáno hodnotami v tabulce I. Tímto způsobem můžeme však naopak nahradit i soustavy s dopravním zpožděním soustavami vyššího řádu.

10.4. Statická soustava prvního řádu s dopravním zpožděním

Přesto, že soustava vyššího řádu se stejnými seriově řazenými členy celkem dobře vyjadřuje vlastnosti soustav s dopravním zpožděním, potřebujeme někdy i modely soustav se skutečným dopravním zpožděním. Takový model můžeme realisovat snadno využitím schopnosti kondensátoru podržet svůj náboj (či jak krátce říkáme, využitím kapacitní paměti).

Nabíjíme-li přepínačem *vs*, v pravidelných intervalech T přepínaným, řadu stejných kondensátorů $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1(n-1)}, C_{1n}$ vstupním napětím modelu $x(k)$ (obr. 7) a druhým přepínačem *vý*, synchronně přepínaným s prvním, jehož kontakt je však proti prvnímu opožděn o d kroků, vybíjíme tyto kondensátory do sběrné kapacity C_0, bude stupňová přechodová charakteristika modelu

$$\frac{y(k)}{x_0} = 1 - \left(\frac{C}{C_1 + C}\right)^{k-d} = 1 - e^{-\alpha(k-d)}\,, \tag{16}$$

kde koeficient α, resp. jeho převratná hodnota, poměrná časová konstanta soustavy $\frac{T_s}{T} = \frac{1}{\alpha}$, je opět dán vztahy (9) a (10). Tímto způsobem získáváme model soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním

$$t_d = Td \tag{17}$$

a časovou konstantou T_s. Maximálně dosažitelné dopravní zpoždění je dáno počtem přepínaných kondensátorů a dobou cyklu T přepínání synchronně se pohybujících přepínačů *rs* a *rý*.

Ve Výzkumném ústavě acetylenové chemie byl na tomto principu konstruován model se 150 kondensátory po 0,02 μF (kondensátory Tesla se styroflexovou isolací), který při maximální době přepnutí 10 s dovoluje maximální dopravní zpoždění 1500 s, s možností rozšíření na 450 kondensátorů s maximálním dopravním zpožděním 4500 s = 75 min. Jako přepinačů bylo užito telefonních hledačů, řízených řididly a sadou relé. Dopravní zpoždění, nastavené před pokusem třemi přepinači, určuje okamžik automatického spuštění výstupního přepínače opožděně po spuštění přepínače vstupního. Pro krokování voličů je jako impulsního generátoru užito elektrického časovače (hodin pro fotografy), u kterého je možno nastavit dobu cyklu od 1 vteřiny. V obr. 8 je reprodukována přechodová charakteristika soustavy, tímto modelem nahrazené.

Jako impedančních měničů bylo původně užíváno pH-metrů Tesla VUPEF, typ 364 [9] a k registraci bylo užito sovětského zapisovače EPD 07 s diskovým záznamem, u kterého byl pohon synchronním motorkem překonstruován na krokový pohon z druhého časovače (impulsového generátoru). Tím bylo dosaženo snadné a rychlé možnosti změny zapisovací rychlosti. Z obr. 8 a dalších je zřejmé, že ani stupňovitý charakter výstupního napětí modelu, ani krokový impulsový pohon zapisovače nejsou na závadu.

Protože u uvedeného pH-metru vyskytovalo se občas v souvislosti s vlhkostí vzduchu nabíjení sběrné výstupní kapacity, byl překonstruován zesilovač zapi sovače EPD 07 tak, že na mřížku první elektronky byl připojen přímo kondensátor 0,05 μF, který je přepínán vibrátorem *vi* na měřené napětí $y(k)$ a kompensační napětí $u(k)$, automaticky měněné motorem kompensátoru tak, aby byla trvale udržována rovnováha (obr. 9). Katodový odpor první elektronky byl přitom zvětšen tak, že elektronka pracuje jako katodový sledovač (úpravu provedl věd. asp. Ing. Jaroslav Maršík). Zapisovač pracuje v tomto spojení jako bezspotřební zapisující milivoltmetr již od rozsahu 0—60 mV.

10.5. Užití impulsních modelů

10.5.1. Zkoušky regulátorů

V obrázku 10 je blokové zapojení modelu pro zkoušky regulátorů. Na model je zapojen impedanční měnič se zápisem regulované veličiny a vysílačem pro převáděcí člen I, který převede napětí nebo pohyb z impedančního měniče na vstupní veličinu zkoušeného regulátoru (el. napětí, tlak vzduchu a pod.). Za regulátorem je zapojen převáděcí člen II, který převede výstupní veličinu regulátoru na elektrické napětí (na př. servomotor s potenciometrickým vysílačem, manometr s potenciometrickým vysilačem a pod.). Po vhodném nastavení konstant modelu je možno tímto způsobem rychle zkoušet regulátory, regulovaná veličina je registrována. Podobně může být sestaveno i spojení pro víceparametrovou regulaci. V obr. 11a, b, c jsou uvedeny příklady takto registrovaných regulačních pochodů.

10.5.2. Integrující a derivující člen, poddajná zpětná vazba

Impulsové kapacitní soustavy můžeme přímo užít jako přibližně integrujícího a přibližně derivujícího členu. Výstupní napětí soustavy $y(k)$ po skokové změně vstupního napětí x_0 (obr. 12.) je

$$y(k) = x_0\, 1 - e^{-\alpha k}) \doteq x_0 \alpha k = x_0 \sum_{k=1}^{k} \alpha \qquad (18)$$

(pokud je $\alpha \lessdot 1$, t. j. pokud je časová konstanta impulsové soustavy velká). Soustava působí proto jako přibližně integrující člen.

Rozdíl napětí vstupního a napětí na kondensátoru C_1

$$z(k) = x(k) - y(k) \qquad (19)$$

je přibližným diferenciálem vstupního napětí, tedy na př. při lineárním stoupání vstupního napětí je

$$z(k) = x(k) - y(k) = ak - y(k) = \frac{a(1 - e^{-\alpha k})}{1 - e^{-\alpha}}\,. \qquad (20)$$

Pokud je časová konstanta $T_s = \dfrac{T}{\alpha}$ malá, je přibližně

$$z(k) \doteq x(k) - x(k-1) = a \qquad (21)$$

a napětí $z(k)$ je přibližně rovno první diferenci napětí vstupního, tedy při dostatečně krátké době periody T i první derivaci napětí vstupního.

Stupňový přenos

$$\frac{\mathcal{L}[z(k)]}{\mathcal{L}[x(k)]} = \frac{e^p - 1}{e^p - e^{-\alpha}} \qquad (22)$$

odpovídá přenosu poddajné zpětné vazby při spojitých regulacích

$$F(p) = \frac{p}{p + \alpha} \qquad (23)$$

a můžeme proto napětí $z(k)$ užít též jako zpětnovazební napětí regulátoru k dosažení poddajné zpětné vazby. Časovou konstantu zpětné vazby můžeme přitom pohodlně měnit změnou kapacit $\dfrac{C_1}{C}$.

10.5.3. Diferencující člen

Kapacitní paměti můžeme užít i pro přesné vytvoření první diference vstupního napětí. Vycházíme přitom z definice

$$x(k) = x(k + 1) - x(k) \tag{24}$$

a měříme rozdíl napětí v $(k - 1)$-ním intervalu proti napětí v k-tém intervalu tím, že měříme rozdíl napětí vstupního $x(k)$ a napětí jednoho z kondensátorů C, které jsou střídavě přepínány na vstup, viz obr. 13.

Nekreslená relé A, B s kontakty a_1, a_2, b_1 b_2, jsou buzena tak, že na př. v lichých intervalech $2k + 1$ je buzeno relé A, v sudých intervalech $2k$ relé B. Podobným způsobem je možno vytvořit i druhou, třetí atd. diferenci, potřebný počet relé a jejich kontaktů přitom však rychle roste. Tak na příklad pro vytvoření druhé diference obdobným způsobem je zapotřebí čtyř relé celkem s 20 spínacími kontakty.

10.5.4. Model regulátoru PID

Použitím výše uvedených prvků můžeme vytvořit nejen model regulované soustavy, ale i model regulátoru, na př. proporcionálně-integračního s derivační složkou. Jeho schema je nakresleno na obr. 14.

Vstupní signál pro model regulátoru (úměrný regulační odchylce) je vytvořen jako střídavé napětí $x(k)$, které je přes tři paralelně zapojené transformátory po usměrnění v usměrňovačích U_1, U_2 a U_3 přivedeno ke třem děličům napětí, kterými jsou nastavovány jednotlivé složky regulátoru, proporcionální P, derivační D a integrační I. Velikost složek je možno měřit na připojených voltmetrech. Celkové zesílení modelu regulátoru je měněno v impedančním měniči IM.

10.6. Závěr

Bylo referováno o novém modelu statických regulovaných soustav, jehož působení je založeno na kapacitní paměti. Proti jiným modelům má výhodu v tom, že je ho možno použít i pro modelování soustav s velikými, snadno měnitelnými časovými konstantami. Podobně je možno konstruovat model soustavy s dopravním zpožděním a členy diferencující a integrující. Na několika příkladech bylo ukázáno na možnost použití modelů s impulsujícími kapacitními soustavami.

Literatura

[1] R. C. Oldenbourg a H. Sartorius, ASME-Paper No 53 A, 18 (1953).
[2] H. Sartorius, Regelungstechnik 2 (1954), 165.
[3] J. Hänny, Regelungstechnik 2 (1954), 171.
[4] D. Singer, Slaboproud. obzor 16 (1955), 120.
[4a] R. Reeber, Regelungstechnik 4 (1956), 13.
[5] J. G. Ziegler a N. B. Nichols, Trans. ASME 65 (1943), 433.
[6] M. Balda, Analogony regul. obvodů, Techn. zpráva Regula-vývoj, č. 17, 18 (1955).
[7] D. Singer, Použití analogonů pro řešení regulačních pochodů, Souhrn prací o automatisaci, Praha 1955.
[8a] Ja. Z. Cypkin, Perechodnyje i ustanovivšijesja processy v impulsnych cepjach, Moskva 1951.
[8b] M. Šalamon, Nespojité regulace, Souhrn prací o automatisaci, Praha 1955.
[9] M. Šalamon, Slabopr. obzor 17 (1956), 115.

Tabulka 1

n	$\frac{T_{sn}}{T_{s1}}$	$\frac{t_d'}{T_{s1}}$	$\frac{t_d'}{T_{sn}}$
1	1	0	0
2	2,66	0,29	0,109
3	3,72	0,77	0,207
4	4,5	1,42	0,315
5	5,15	2,1	0,411
6	5,7	2,8	0,492

Obr. 1. Přechodová charakteristika soustavy vyššího řádu (a) a její náhrada soustavou prvního řádu s dopravním zpožděním t_d' (b) a lomenou čarou *0123* (c).
Obr. 2. Impulsová soustava prvního řádu (a) a časový sled přepínání kontaktu j (b).
Obr. 3. Závislost poměrné časové konstanty τ impulsové soustavy na poměru sběrné a přenášecí kapacity.
Obr. 4. Závislost poměrné časové konstanty τ (a) a zesílení Z_{sn} (b) impulsové soustavy na poměru doby cyklu T a časové konstanty sběrného kondensátoru T_1. Parametr: poměr sběrné a přenášecí kapacity.
Obr. 5. Impulsová soustava druhého řádu se zpětným působením (a) a bez zpětného působení (b). IM impedanční měnič.
Obr. 6. Impulsová soustava n-tého řádu bez zpětného působení.
Obr. 7. Impulsová soustava prvního řádu s dopravním zpožděním.
Obr. 8. Přechodová charakteristika impulsové soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním.
Obr. 9. Úprava potenciometrického elektronkového zapisovače EPD-07 na impedanční měnič.
Obr. 10. Blokové zapojení impulsového modelu pro zkoušení regulátorů.
Obr. 11. Příklady regulačních pochodů při uspořádání podle obr. 10.
Obr. 12. Integrační a derivační impulsní člen.
Obr. 13. Diferencující impulsní člen.
Obr. 14. Model PID regulátoru s impulsními členy.

11. ELEKTROMECHANICKÝ ANALOGON REGULAČNÍCH OBVODŮ EMAN I

Ing. Milan Balda
kand. tech. věd

Regula — vývoj, n. p., Praha

V roce 1954 byl postaven na katedře technického měření a regulace na fakultě strojního inženýrství ČVUT v Praze prototyp elektromechanického analogonu regulačních obvodů s typovým označením **EMAN I**.

Koncepce analogonu vyplynula jednak z požadavků, jednak z rozboru vlastností známých typů analogonů regulačních obvodů. Protože zařízení je určeno především k pedagogickým účelům, je analogon postaven jako analogon vlastní, s vyjádřenými jednotlivými členy regulačního obvodu. Hodnota regulované veličiny a poloha regulačního orgánu se trvale zaznamenávají na záznamní pás. Časové konstanty jsou voleny tak, aby bylo možno sledovat průběh regulačního pochodu bez potíží přímým pozorováním.

Vlastní konstrukce analogonu byla pak dána těmito hledisky:

1. Vzhledem k omezeným možnostem dílenským musela být stavba co nejjednodušší, s omezeným počtem součástí, zejména mechanických.

2. Vyžadovala se jednoduchá obsluha, snadné a rychlé propojování jednotlivých funkčních celků a nastavování konstant.

3. Konečně se vyžadoval ucelený vzhled a bezpečnost při provozu.

EMAN I je analogon vlastní, u něhož se všechny vyšetřované veličiny převádějí na napětí. Skládá se z těchto funkčních celků:

a) z analogonu regulátorů se zapisovačem polohy regulačního orgánu,

b) z analogonu regulovaných soustav,

c) ze zapisovače regulované veličiny.

Blokové schema analogonu je znázorněno na obr. 1, zjednodušené schema zapojení je na obr. 2. Jak patrno, zavádí se výstupní napětí ze soustavy na vstup regulátoru a výstupní napětí regulátoru na vstup soustavy. Tím je regulační obvod uzavřen. Zapisovač regulované veličiny je připojen paralelně k výstupu soustavy.

Na analogonu lze snímat přechodové charakteristiky rozpojených regulačních obvodů a jejich částí a vyšetřovat regulační obvody s proporcionálními nebo integračními regulátory a s regulovanými soustavami až do čtyř kapacit.

Práce s analogonem je velmi názorná a jednoduchá.

11.1 Analogon spojitých regulátorů

Analogon spojitých regulátorů je postaven tak, že lze na něm provádět tyto zásahy:

a) nastavovat pásmo proporcionality v rozsahu 12 až 100% nebo v jiných rozsazích po změně napětí zdroje zpětné vazby,

b) nastavovat žádanou hodnotu regulované veličiny v celém rozsahu stupnice,

c) znázornit vliv čidla,

d) nastavit libovolnou charakteristiku regulačního orgánu,

e) znázornit vliv vůle v mechanických spojeních na činnost regulátoru.

Mimo to se samočinně zapisuje poloha regulačního orgánu během regulačního pochodu.

Analogon spojitého regulátoru je regulátor napětí, který pracuje na podstatě samočinného elektronického potenciometru. Činnost vysvětlíme na základním schematu podle obr. 3. Regulovanou veličinou je výstupní napětí ze soustavy, připojené na vstup regulátoru. Toto napětí se má dodržovat konstantní.

Proti vstupními napětí, přiváděnému do regulátoru z analogonu soustavy, působí napětí od zpětné vazby. Rozdíl obou se zavádí do zesilovače, který napájí balanční motorek. Podle polarity tohoto signálu se otáčí balanční motorek na jednu nebo druhou stranu tak dlouho, až se napětí od zpětné vazby vyrovná s napětím vstupním. Pak je signál na vstupu zesilovače nulový a motorek se zastaví.

S běžcem potenciometru zpětné vazby je spojen běžec potenciometru, který znázorňuje regulační orgán. Zvětší-li se vstupní napětí regulátoru, uvede se balanční motorek a s ním spojené běžce potenciometrů do pohybu v takovém smyslu, že výstupní napětí z regulátoru klesá. Tím klesne i napětí v analogonu regulovaných soustav, takže se napětí na vstupu regulátoru (t. j. vlastní regulovaná veličina) vrátí přibližně na původní hodnotu.

Na obrázku 4 je kompletní blokové schema regulátoru. Analogon spojitých regulátorů obsahuje tyto části:

ŽH stavění žádané hodnoty regulované veličiny,
ZV obvod zpětné vazby,
RO regulační orgán s nastavitelnou charakteristikou,
$<$ zesilovač,
BM balanční motorek,
RCL obvod znázorňující vliv čidla a dálkového přenosu.

Signál zaváděný do regulátoru prochází nejdříve obvodem RCL, který obsahuje proměnný odpor, kapacitu a indukčnost, kde se žádaným způsobem zdeformuje nebo zpozdí. Signál se dále porovnává s napětím odpovídajícím žádané hodnotě regulované veličiny. K odchylce od žádané hodnoty (t. j. k regulační odchylce) se přičte napětí od zpětné vazby a teprve výsledné napětí se zavádí do zesilovače. Ten pohání popsaným způsobem balanční motorek, který ovládá potenciometr regulačního orgánu.

Nastavování žádané hodnoty

Proti vstupnímu signálu se zavádí signál žádané hodnoty, stavěný ručně běžcem potenciometru. Do dalších členů regulátoru pak vstupuje rozdíl mezi žádanou a skutečnou hodnotou, t. j. regulační odchylka (obr. 5).

Nastavování zpětné vazby

K signálu zaváděnému do zesilovače se přičítá signál od zpětné vazby (obr. 6). Je-li obvod zpětné vazby rozpojen, t. j. nedává-li zpětná vazba napětí, pracuje regulátor astaticky. Regulační orgán se ustálí v takové poloze, při níž se skutečná hodnota regulované veličiny, t. j. vstupní signál regulátoru, rovná žádané hodnotě, avšak s opačným znaménkem. V tomto případě dodržuje regulátor přesně žádanou hodnotu regulované veličiny, je však v podstatě nestabilní.

Při zapojené zpětné vazbě se přičítá k regulační odchylce napětí od zpětné vazby. Regulátor se ustálí v takové poloze, při níž se vstupní signál rovná součtu žádané hodnoty a signálu od zpětné vazby. Vzniká trvalá regulační odchylka, způsobená pevnou zpětnou vazbou. Regulátor pracuje staticky.

Sestavíme rovnici regulátoru v ustáleném stavu (obr. 7): regulátor je v klidu, je-li na vstupu zesilovače nulové napětí

$$u_4 - u_1 + u_3 = 0 .$$

Zde je u_1 vstupní napětí regulátoru,
u_3 napětí, úměrné žádané hodnotě regulované veličiny (u_3 = konst),
u_4 napětí zpětné vazby.

Výchylka balančního motorku s, vztažená na pohyb zapisovacího pera, je přímo úměrná napětí zpětné vazby

$$s = ku_4 ,$$

kde je k zesílení regulátoru, nastavené předřazným odporem R.

Při kladné výchylce balančního motorku klesá výstupní napětí u_2 (regulační orgán uzavírá). Označíme-li rozsah zdvihu s 0 až 1 a rozsah výstupního napětí u_2 také 0 až 1, platí, že

$$u_2 = 1 - s .$$

Z dílčích rovnic dostaneme pak rovnici regulátoru v ustáleném stavu

$$u_2 = 1 - k(u_1 - u_3) .$$

Je tedy výstupní napětí přímo úměrné regulační odchylce. Zesílení regulátoru, t. j. poměr výstupního napětí k regulační odchylce, závisí na nastavení předřazného odporu R.

Regulační orgán

Regulační orgán dovoluje nastavit libovolnou charakteristiku. Je vytvořen jako programový potenciometr (obr. 8). Potenciometr má 20 odboček, z nichž každou lze zapojit na dělič napětí, odstupňovaný po 1%. Charakteristika regulačního orgánu je pak dána lomenou čarou, složenou z dvaceti úseků. Průběh lomené charakteristiky se může lišit od požadovaného průběhu nejvýše asi o 1%. Této přesnosti lze u skutečných regulačních orgánů dosáhnout jen výjimečně.

Zesilovač a balanční motorek

Analogon pracuje se stejnosměrným signálem, který je nutno převést na úměrný signál střídavý, potřebný k pohonu balančního motorku.

Stejnosměrný signál se mění ve střídavý ve střídači zapojeném jako kruhový modulátor. Výstupní napětí ze střídače je ve fázi nebo v protifázi se sítí podle polarity vstupního signálu a jeho amplituda je úměrná velikosti vstupního signálu.

Výstupní napětí ze střídače se zavádí do střídavého elektronického zesilovače podobného provedení, jakého se používá u průmyslových samočinných potenciometrů.

Balanční motorek je dvoufázový asynchronní motor se dvojím vinutím. Jedno vinutí je napájeno ze zesilovače, druhé ze sítě přes kondensátor, takže napětí na něm je otočeno proti síti o 90°. V prvním vinutí je napětí buď ve fázi nebo

v protifázi se sítí podle polarity signálu na vstupu zesilovače. Tím vzniká v balančním motorku točivé magnetické pole v jednom nebo druhém smyslu. Při malých hodnotách vstupního signálu se motorek otáčí rychlostí úměrnou velikosti signálu.

Obvod pro znázornění vlivu čidla

Regulátor je vybaven RCL obvodem, kterým lze znázornit vliv čidla (na př. tepelnou setrvačnost a pod.). Obvod obsahuje odpor, kapacitu a indukčnost. Tyto prvky jsou proměnné a lze je zapojit v libovolné kombinaci.

Vstupní obvod regulátoru je upraven tak, aby bylo možno připojit po případě obvod pro matematické operace.

Obvod na znázornění vůle

V převodu mezi balančním motorkem a pohonem potenciometrů je upraven stavitelný výřez, takže je možno vyšetřovat vliv vůle (na př. v mechanických převodech) na průběh regulačního pochodu. Největší vůle, kterou lze nastavit, je asi 150° na hřídeli pohonu, t. j. asi 50% rozsahu stupnice.

Zapisovací zařízení

S běžci potenciometrů zpětné vazby a regulačního orgánu je spojeno zapisovací pero, které zaznamenává pohyb regulačního orgánu během regulačního pochodu. Šířka záznamu je 100 mm, posuv záznamního pásu je 5 mm/s.

Rovnice analogonu regulátorů

Pohybovou rovnici regulátoru sestavíme takto (obr. 7): balanční motorek se pohybuje rychlostí, úměrnou rozdílu napětí na vstupu zesilovače. Proti pohybu působí setrvačná hmota všech pohybujících se částí. Platí tedy pro pohyb balančního motorku (rovnici píšeme hned v bezrozměrném tvaru), že

$$\frac{u_1 - u_3}{u_{max}} - \frac{u_4}{u_{max}} = \frac{s_{max}}{u_{max}} \left(T_1 \frac{d}{dt} \frac{s}{s_{max}} + m \frac{d^2}{dt^2} \frac{s}{s_{max}} \right).$$

Podobně píšeme v bezrozměrném tvaru i vztah mezi velikostí napětí zpětné vazby a pohybem motorku:

$$\frac{u_4}{u_{max}} = \frac{s_{max}}{u_{max}} \frac{1}{k} \frac{s}{s_{max}}$$

a vztah mezi výstupním napětím napětím a pohybem motorku (nehledíme-li k absolutním hodnotám):

$$-\frac{u_3}{u_{max}} = \frac{s_{max}}{u_{max}} \frac{s}{s_{max}}.$$

V rovnicích značí

u_{max}	vztažné napětí (na př. napětí kompensačního zdroje)
s_{max}	celkový zdvih regulačního orgánu,
$\frac{u_1 - u_3}{u_{max}} = \varphi$	poměrnou hodnotu regulační odchylky,
$\frac{u_3}{u_{max}} = \mu$	poměrnou hodnotu výstupní veličiny regulátoru,
T_1	součinitele, obdobného době závěru pohonu,
m	součinitele, udávajícího vliv setrvačné hmoty,
k	zesílení regulátoru.

Vyloučíme-li proměnné, které nás nezajímají, dostáváme rovnici regulátoru

$$\varphi = \frac{1}{k}\mu + T_1\mu' + m\mu''.$$

V ustáleném tvaru jsou obě derivace rovny nule a rovnice regulátoru dostane tvar

$$\varphi_{ust} = \frac{1}{k}\mu.$$

Regulátor pracuje s trvalou regulační odchylkou, t. j. staticky. Statické zesílení regulátoru $\frac{\mu}{\varphi} = k$, jak jsme už dříve odvodili.

Jestliže rozpojíme obvod zpětné vazby ($k = \infty$), dostane rovnice regulátoru tvar

$$\varphi = T_1\mu' + m\mu''$$

a regulátor bude pracovat astaticky, protože v ustáleném stavu bude regulační odchylka

$$\varphi_{ust} = 0.$$

Zesílení regulátoru k známe. Je dáno velikostí předřazeného odporu v obvodu zpětné vazby. Ostatní hodnoty T_1 a m bychom mohli vypočítat z konstrukce přístroje. Je to však velmi pracné a v praxi se tohoto postupu nepoužívá. Hodnoty konstant vyšetřujeme proto zpravidla z naměřených dynamických charakteristik regulátoru. V daném případě mají jednotlivé konstanty tyto hodnoty:

$$k = 1 \text{ až } 100,$$
$$T_1 = 0{,}032 \text{ s},$$
$$m = 0{,}0034 \text{ s}^2.$$

(Postup při vyhledávání číselných hodnot konstant je podrobně popsán v práci [1].)

11.2. Konstrukce analogonu regulovaných soustav

Analogon soustav je sestaven z řady odporů, kapacit a indukčností, které lze zapojit v libovolné kombinaci. Tím je možno znázornit velké množství technicky důležitých regulovaných soustav. Každý z prvků soustavy lze nastavit v deseti hodnotách. Na výstup soustavy je připojen kathodový sledovač, aby soustava nebyla zatěžována nežádoucími vlivy.

Analogon regulovaných soustav obsahuje celkem 4 kapacity, 5 odporů, 2 indukčnosti a kathodový sledovač se ziskem 0,92. Mimo to lze k soustavě připojit libovolný počet vnějších prvků.

Póly jednotlivých prvků analogonu jsou vyvedeny do dvojitých zdířek na panelu. Toto uspořádání dovoluje propojit jednotlivé prvky v libovolné kombinaci při nejmenším počtu zdířek, banánků, přepinačů, kablíků a pod. Prvky se propojují ohebnými kablíky s banánky.

Kathodový sledovač je běžného provedení. Zisk sledovače je 0,92 (střední hodnota). Řízením předpětí sledovače je možno posunout záznam na zapisovači regulované veličiny do libovolné polohy na záznamním pásu.

Činnost analogonu regulovaných soustav byla kontrolována velkým počtem měření přechodových charakteristik různých druhů regulovaných soustav nebo jiných obvodů.

Přechodové charakteristiky byly snímány způsobem naznačeným na obrázku 9. Změna skokem na vstupu soustavy byla provedena rychlým přestavením běžce potenciometru z jedné krajní polohy do druhé. I když nejde ve skutečnosti o nekonečně rychlý skok (přestavení trvá asi 0,2 s), není tím průběh přechodové charakteristiky nikterak zkreslen.

Analogon soustav je jednoduchý, práce s ním je přehledná a rychlá a přesnost vyhovuje.

Zapisovač regulované veličiny

Zapisovač regulované veličiny je elektronický samočinný potenciometr, shodný v podstatě se zapisovačem polohy regulačního orgánu. Mechanicky i elektronicky je proveden stejně, jen s tím rozdílem, že obsahuje pouze potenciometr zpětné vazby.

Blokové schema zapojení zapisovače je na obr. 10. Největší odchylka od linearity mezi záznamem a vstupním signálem je menší než 0,5%. Přechod zapisovacího pera přes celou stupnici při změně vstupního signálu o 100% trvá průměrně 1 s. Šířka záznamu je shodná se zapisovačem polohy regulačního orgánu, t. j. 100 mm, stejně tak i posuv záznamního pásu 5 mm/s.

11.3. Příklady práce s analogonem

Na několika příkladech ukážeme praktickou použitelnost analogonu.

Charakteristiky soustav 1. řádu

Na obrázku 11 jsou uvedeny některé přechodové charakteristiky, překreslené z původních diagramů. Na jednotlivých přechodových charakteristikách byly kontrolovány body 63,2%, 90% a 99% konečné hodnoty, t. j. body v čase $t = T$, resp. $2{,}3T$ nebo $4{,}6T$, kde je $T = RC$ časová konstanta soustavy.

Bylo zjištěno, že odchylky záznamů od vypočteného průběhu jsou v mezích 1 až 3%.

Z obrázku je též patrno, že výstup soustavy je trvale zatěžován vstupním odporem sledovače, který je 70 MΩ. To způsobuje, že v ustáleném stavu je napětí na vstupu sledovače menší než napětí na vstupu soustavy v poměru odporu soustavy R a vstupního odporu sledovače.

Bude-li zisk sledovače 0,92, bude v ustáleném stavu na výstupu sledovače napětí

$$u_2 = 0{,}92 \frac{70}{70 + \Sigma R}\, u_1 ,$$

kde je u_1 napětí na vstupu soustavy,
u_2 napětí na výstupu sledovače (t. j. napětí, zaznamenané zapisovačem),
ΣR součet odporů soustavy, seriově řazených se sledovačem.

Naměřené hodnoty se v tomto případě velmi dobře shodují s vypočtenými hodnotami.

Charakteristiky soustav vyšších řádů

Na obrázku 12 jsou překresleny přechodové charakteristiky soustav, složených z 1, 2, 3 a 4 vzájemně na sebe působících členů RC. Časové konstanty všech členů jsou stejné ($RC = 1$ s). Jednotlivé charakteristiky byly kontrolovány s vypočtenými hodnotami a byly též zaznamenány několikrát. Odchylky od výpočtu a příslušné záznamy se liší nejvýše o 1 až 3%.

Charakteristiky náhradních obvodů

Na analogonu soustav s neoddělenými členy lze vyšetřovat jakost náhradních obvodů derivačních (D), proporcionálních plus derivačních (PD), proporcionálních plus integračních (PI) a proporcionálních plus integračních plus derivačních (PID). Těchto obvodů, složených z pasivních prvků, se používá u samočinných regulátorů, aby se zmenšil vliv zpoždění při přenosu signálu od čidla k regulátoru (obvod PD) a ve zpětných vazbách k dosažení žádané funkce regulátoru (obvody PD, PI, PID).

Ukážeme na příkladě, jak dalece se podaří reprodukovat charakteristiku obvodu PID na analogonu.

Je dán PID obvod podle schematu na obr. 13. Platí tyto zřejmé vztahy:

$$i_0 = i_1 + i_2\,; \qquad i_1 = \frac{u_1 - u_2}{R_d}\,; \qquad i_2 = C_d \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}\,; \qquad u_3 = u_1 - u_2\,;$$

$$u_2 = u_4 + u_5\,; \qquad u_4 = i_0 R_i\,; \qquad i_0 = C_i \frac{\mathrm{d}u_5}{\mathrm{d}t}\,.$$

Po eliminaci proměnných, které nás nezajímají, dostáváme závislost výstupního napětí u_2 na vstupním napětí u_1:

$$R_i C_i R_d C_d \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_2 + (R_i C_i + R_d C_d + R_d C_i) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2 + u_2 =$$

$$= R_i C_i R_d C_d \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_1 + (R_i C_i + R_d C_d) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1 + u_1\,.$$

Vypočtené pohybové rovnici přísluší přenos

$$f(p) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + p(T_i + T_d) + p^2 T_i T_d}{1 + p(T_i + T_d + T_{id}) + p^2 T_i T_d}\,,$$

$$\left(p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,; \quad T_i = R_i C_i\,; \quad T_d = R_d C_d\,; \quad T_{id} = R_d C_i\right).$$

V daném případě je

$$R_i = 1\ \mathrm{M\Omega}\,, \quad C_i = 1\ \mu\mathrm{F}\,, \quad R_d = 2\ \mathrm{M\Omega}\,, \quad C_d = 1\ \mu\mathrm{F}$$

a tedy

$$T_i = 1\ \mathrm{s}\,, \quad T_d = 2\ \mathrm{s}\,, \quad T_{id} = 2\ \mathrm{s}\,.$$

Dosadíme-li číselné hodnoty do rovnice pro přenos a provedeme-li zpětnou transformaci, dostáváme přechodovou funkci vyšetřovaného obvodu (t. j. řešení jeho pohybové rovnice pro $u_1 = 1$):

$$u_2 = 1 + 0{,}485\mathrm{e}^{-2{,}281t} - 0{,}485\mathrm{e}^{-0{,}219t}\,.$$

Na obrázku je porovnán originální záznam s vypočtenými hodnotami. Jsou zakresleny pro názor též obě exponenciály, z nichž se skládá přechodová charakteristika. Časová konstanta derivační složky $T_d = \frac{1}{2{,}281} = 0{,}44$ s, integrační složky $T_i = \frac{1}{0{,}219} = 4{,}6$ s. Proporcionální složka je tu $1 - 0{,}485 = 0{,}515$.

Průběh u skutečného obvodu (plně vytažený) se dobře shoduje s vypočteným průběhem, naznačeným čárkovaně. Větší odchylka vzniká na začátku průběhu, kdy se projeví omezená rychlost zapisovače. V dalším průběhu činí největší odchylka asi 2%.

Analogonu regulovaných soustav se dá tedy dobře použít i k vyšetřování podobných obvodů.

Průběh regulačního pochodu

Na obrázku 14 jsou nakresleny regulační pochody proporcionálního regulátoru, připojeného k soustavě druhého řádu. Regulační obvod byl vyveden z rovnovážného stavu násilným vychýlením regulačního orgánu. Regulační pochod, který následoval po uvolnění regulačního orgánu, byl zaznamenáván při různých zesíleních regulátoru.

Jak patrno, dává analogon velmi přehledné výsledky a s postačující přesností.

11.4. Závěr

Na elektromechanickém analogonu EMANu I lze vyšetřovat regulační obvody s proporcionálními nebo integračními regulátory a se soustavami až do 4 kapacit. Průběh hodnoty regulované veličiny a polohy regulačního orgánu v čase se zapisuje na záznamní pás. Činnost celého zařízení je natolik přehledná, že se ho používá k pedagogickým účelům.

Přesnost výsledků na analogonu činí podle okolností 1 až 5%, což pro daný účel vyhovuje. Časové konstanty regulátoru a soustavy jsou voleny tak, aby vyšetřovaný pochod trval 10 až 20 s, t. j. 50 až 100 mm na záznamním pásu. Tím se dosáhlo dobré přehlednosti záznamu. Zkrácená časová konstanta dovoluje v krátké době vyšetřit velké množství případů.

Podle zkušeností s tímto analogonem byl vypracován projekt velkého elektromechanického analogonu EMANu II, který je t. č. ve stavbě v n. p. Regulavývoj. Tento analogon bude obsahovat analogony spojitých i nespojitých regulátorů, soustav s oddělenými i neoddělenými prvky, a to jak soustav statických, tak astatických. Zařízení bude vybaveno samočinnými zapisovači frekvenčních charakteristik. Bude též obsahovat analogony soustav s rozloženými prvky a bude na něm možno vyšetřovat i víceparametrové regulace.

11.5. Dodatek

Při zpracovávání podkladů pro práci s analogonem je možno formulovat potřebná kriteria ještě jinak, než porovnáváním bezrozměrných parametrů, jak ukážeme na jednoduchém příkladě spojitého regulačního obvodu s poruchou konstantní velikosti.

Nechť má rovnice regulačního obvodu tvar:

$$T_m^m \varphi^{(m)} + T_{m-1}^{m-1} \varphi^{(m-1)} + \ldots + T_2^2 \varphi'' + T_1 \varphi' + T_0 \varphi = \varkappa ,$$

$$\left(\varphi^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i}{(\mathrm{d}t)^i} \varphi ; \quad i = 1, 2, \ldots, m \right).$$

Rovnice analogického obvodu pak je

$$S_m^m \psi^{(m)} + S_{m-1}^{m-1} \psi^{(m-1)} + \ldots + S_2^2 \psi'' + S_1 \psi' + S_0 \psi = \lambda ,$$

$$\left(\psi^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i}{(\mathrm{d}\tau)^i} \psi ; \quad i = 1, 2, \ldots, m ; \quad \tau = \frac{1}{\alpha} t \right).$$

Zde značí φ — poměrnou hodnotu regulované veličiny,
ψ — poměrnou hodnotu analogické veličiny,
$T_1, T_2, \ldots, T_m$ — časové konstanty regulačního obvodu,
$S_1, S_2, \ldots, S_m$ — časové konstanty analogického obvodu,
$\varkappa$ — poruchu v regulačním obvodu,
λ — poruchu v analogickém obvodu,
α — časové měřítko analogonu.

Časové konstanty píšeme v tolikátém stupni, kolikátého řádu je derivace příslušného členu. Je to výhodné proto, že součinitelé jednotlivých členů bezrozměrné rovnice mají rozměr času, a to v mocnině, odpovídající řádu derivace.

Vyjádříme-li v rovnici analogického obvodu časové měřítko v poměru k časovému měřítku vyšetřovaného obvodu, dostaneme $\left(\text{pro } \tau = \frac{1}{\alpha} t\right)$:

$$\alpha^m S_m^m \psi^{(m)} + \alpha^{m-1} S_{m-1}^{m-1} \psi^{(m-1)} + \ldots + \alpha^2 S_2^2 \psi'' + \alpha S_1 \psi' + S_0 \psi = \lambda ,$$

$$\left(\psi^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i}{(\mathrm{d}t)^i} \psi ; \quad i = 1, 2, \ldots, m \right).$$

Aby uvedené rovnice popisovaly analogické pochody, musí platit:

1. v ustáleném stavu musí být poměrné odchylky pro stejné poměrné poruchy stejně veliké. Z toho plyne podmínka analogie

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{T_0}{S_0} = 1 .$$

Tato podmínka je též zřejmá z toho, že oba obvody musí mít stejné statické zesílení, t. j. $T_0 = S_0$.

2. během přechodového stavu se musí rovnat stejnolehlí součinitelé analogických rovnic, jejichž derivace se vztahují ke stejnému časovému měřítku. Je tedy

$$T_m^m = \alpha^m S_m^m , \quad T_{m-1}^{m-1} = \alpha^{m-1} S_{m-1}^{m-1} , \quad \ldots , \quad T_2^2 = \alpha_1 S_2^2 , \quad T_1 = \alpha S_1 .$$

Lze se snadno přesvědčit, že uvedené rovnice se svým významem prakticky shodují s dřívějšími podmínkami analogie, t. j. s rovností odpovídajících bezrozměrných argumentů.

Nás tu však zajímá ještě jiná skutečnost. Vyjádříme-li časové měřítko postupně ze všech posledně uvedených rovnic, dostáváme:

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{T_m^m}{S_m^m}} = \frac{T_m}{S_m} ,$$

$$\alpha = \sqrt[m-1]{\frac{T_{m-1}^{m-1}}{S_{m-1}^{m-1}}} = \frac{T_{m-1}}{S_{m-1}} ,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{T_2^2}{S_2^2}} = \frac{T_2}{S_2} ,$$

$$\alpha = \frac{T_1}{S_1} .$$

Můžeme tedy psát, že pro poměr časových konstant skutečného a analogického obvodu platí

$$\frac{T_m}{S_m} = \frac{T_{m-1}}{S_{m-1}} = \ldots = \frac{T_2}{S_2} = \frac{T_1}{S_1} = \text{konst} = \alpha .$$

Podmínky analogie pak můžeme formulovat asi takto: Dva obvody budou analogické, budou-li jejich rovnice

$$T_m^m \frac{\mathrm{d}^m}{(\mathrm{d}t)^m} \varphi + T_{m-1}^{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{(\mathrm{d}t)^{m-1}} \varphi + \ldots + T_2^2 \frac{\mathrm{d}^2}{(\mathrm{d}t)^2} \varphi + T_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi + T_0 \varphi = \varkappa ,$$

$$S_m^m \frac{\mathrm{d}^m}{(\mathrm{d}\tau)^m} \psi + S_{m-1}^{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{(\mathrm{d}\tau)^{m-1}} \psi + \ldots + S_2^2 \frac{\mathrm{d}^2}{(\mathrm{d}\tau)^2} \psi + S_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \psi + S_0 \psi = \lambda .$$

splňovat podmínky statické a dynamické analogie. Podmínka statické analogie je $\left(\text{pro } \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varkappa}{\lambda} = 1\right)$:

$$\frac{T_0}{S_0} = 1 .$$

Podmínka dynamické analogie je $\left(\text{pro } \tau = \frac{1}{\alpha} t\right)$:

$$\frac{T_m}{S_m} = \frac{T_{m-1}}{S_{m-1}} = \ldots = \frac{T_2}{S_2} = \frac{T_1}{S_1} = \alpha .$$

Takto definované kriterium analogie je v daném případě jednodušší, názornější a dává nahlédnout hlouběji do podstaty analogií, než obvykle používané kriterium s porovnáváním bezrozměrných parametrů.

Kriterium lze rozšířit i na obvody s poruchou libovolného průběhu a na obvody nelineární.

Literatura

[1] M. BALDA, Elektromechanický analogon regulačních obvodů, Sborník 1. vědecké konference fakulty strojního inženýrství ČVUT, SNTL Praha 1956.

[2] M. BALDA, Analogony regulačních obvodů, Kandidátská disertační práce, katedra technického měření a regulace ČVUT v Praze, březen 1955.

[3] L. S. EJGENSON, Modelirovanije, Sovětská nauka, Moskva 1952.

[4] V. FERNER, Der Aufbau einer Modellregelstrecke, Technik 9, 1954, seš. 2, s. 85—89.

[5] J. FREUDENREICH, Apparat zur Untersuchung von Regelungen, Brown Boveri Mitt., Juli 1944, s. 228—232.

[6] L. J. GUTTENMACHER, Električeskije modeli, AN SSSR, Moskva 1949.

[7] J. M. L. JANSSEN, L. ENSING, Das Elektro-Analogon, ein Gerät zur Untersuchung von Regelmechanismen, Philips' Tech. Rdsch. 12, 1951, seš. 9, str. 262—276, seš. 11, s. 324—340.

[8] R. J. KEDKEFF, H. MATTHEWS, Solving Process-Control by Analog Computor, Inst. and Aut. 27, 1954, seš. 10, str. 1624—1626.

[9] G. A. KORN, Elektronnyje modelirujuščije ustrojstva, I. L. Moskva 1955 (překlad z angličtiny).

[10] J. KOŽEŠNIK, Fysikální podobnost a stavba modelů, JČMF, Praha 1948.

[11] G. A. PHILBRICK, Designing Industrial Controllers by Analogue, Electronics, June 1948, s. 108—111.

[12] P. PROFOS, Modellversuche über Reguliervorgänge, Techn. Rdsch., Sulzer 1948, seš. 3, str. 23—27.

[13] D. SINGER, Použití analogonů pro řešení regulačních pochodů, Sborník Souhrn prací o automatisaci, ČSAV Praha 1955.

[14] D. SINGER, Použití elektrických analogií pro typisace a posuzování regulačních soustav, Slaboproudý obzor 12, 1951, seš. 8, str. 171—178.

Obr. 1.
Obr. 2.
Obr. 3.
Obr. 4.
Obr. 5.
Obr. 6.
Obr. 7.
Obr. 8.
Obr. 9.
Obr. 10.
Obr. 11.
Obr. 12.
Obr. 13.
Obr. 14.

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

12. PROJEKT DIFERENCIÁLNÍHO ANALYSÁTORU LABORATOŘE PRO AUTOMATISACI A TELEMECHANIKU ČSAV

Ing. Jiří HAŠKOVEC

Praha, LAT – ČSAV

12.1. Úvod

Jedním z prvních úkolů LAT bylo zracionalisovat výpočtové práce. Poněvadž jde z velké části o výpočty, kterými se ověřují theoretické úvahy a o výpočty podkladů pro diagramy a tabulky, bylo nutno volit takový typ stroje, který by měl dostatečnou přesnost. Nebylo však přitom možno volit stroj číslicový, pro značnou nákladnost a pro nedostatek vhodných prvků ke stavbě číslicových strojů u nás. S ohledem na nejčastější typy řešených rovnic byl zvolen diferenciální analysátor typu Bushova [1], [2], respektive Bushova-Caldwellova [3], [4] s použitím některých zásad, obsažených v práci Erismanově [5].

12.2. Operační jednotka

Bylo ovšem nutno volit konstrukci, umožňující výrobu na obyčejných obráběcích strojích a s omezenými možnostmi součástkové základny, která se od počátků prací v roce 1955 dodnes nezlepšila. S těchto hledisek byl zvolen výrobně jednoduchý třecí převod, používající styku mezi koulí a válcem (obr. 1). Převod má tyto vlastnosti:

1. Styk mezi koulí a válcem je bodový a obě tyto plochy se snadno vyrábějí. Odpadá choulostivá výroba třecího kolečka s přesně definovaným zaoblením, používaným u obyčejných typů deskových.

2. Styk mezi koulí a válcem je možno namáhat poměrně velkým tlakem, takže výstup integrátoru je možno zatížit jistým momentem bez nebezpečí prokluzování.

3. Ústav získal potřebné součásti třecích převodů z vyřazených zaměřovačů. Na obr. 2 je proveden rozbor převodu za předpokladu, že odvalení válce je úměrno tangenciální složce pohybu dotykového místa na kouli. Na obr. 2 je naznačen kulový vrchlík *1*, otáčivý kolem osy O_1, kteréžto otočení označme x. Tento vrchlík se kromě toho vyklání o úhel α zařízením, převádějícím otočení y pohybového šroubu *6* ve vyklonění stolku *3*, nesoucího ložiska pro otáčení vrchlíku *1* kolem osy O_1. Skládá se z vidlice, spojené s matkou na pohybovém šroubu *6*, která unáší kladku *4*, spojenou s ložiskovým stokem *3*. Vrchlík *1* se dotýká třecího válce *2*, otočného kolem osy O_2. Toto otočení je označeno v_1. Zvolíme-li vhodné smysly otáčení za kladné, bude platit pro diferenciální otáčení

$$\mathrm{d}v_1 = \frac{2r}{D}\,\mathrm{d}x = \frac{2R\sin\alpha}{D}\,\mathrm{d}x = \frac{2Ry'}{R'D}\,\mathrm{d}x = \frac{2RK}{R'D}\,y\,\mathrm{d}x\,,$$

kde K je stoupání šroubu *6*, vztažené na jednotku y. Pro celkový počet otáček v_1 odvalených od nějaké počáteční polohy platí,

$$v_1 = \frac{2RK}{R'D}\int_0^x y\,\mathrm{d}x\,,$$

kde jak y tak x je měřeno počtem otáček. Zlomek $\frac{2RK}{R'D}$ daný rozměry převodu určuje integrační konstantu. Na př. pro náš prvek byl zvolen 0,02. Přitom rozsah y byl zvolen ± 100 otáček, takže největší převod je roven $100 \times 0{,}02 = 2$.

Výstup V_1 pohání přímo jedno vstupní kolo součtového soukolí (diferenciálu). Druhé vstupní kolo je připojeno přes převod 2 : 1 na další hřídel, jehož počet otáček nazveme z. Výstup z diferenciálu je dán otáčkami planety, označené v. Pro ně platí:

$$v = \frac{v_1 + 2z}{2}\,,$$

což po dosazení z dřívějšího dává:

$$v = 0{,}01\int_0^x y\,\mathrm{d}x + z\,.$$

Aby bylo lze pohodlně měnit rozsahy a měřítka jednotlivých proměnných, je na výstupní hřídeli uspořádáno několik stupňových převodů V_k ve stálém poměru 1 : 3 a na vstupním hřídeli z je možno obdržet pomocí rychlostní skříně převody $Z_k = 1, 5, 7$. Takto sestavená základní jednotka může být zapojena buď jako součtová, pak je hodnota y konstantní a pro výstup v platí:

$$v = V_k(0{,}01yx + Z_kz) = 0{,}01V_kyx + V_kZ_kz$$

nebo jako integrační. V tomto případě je možno zvětšit rozsah a přesnost proměnné y tím, že hřídel z se otáčí úměrně otáčkám x pomocí vhodného stupně nastavitelného převodu Z_k. Výstupní otáčky pak budou

$$\mathrm{d}v = V_k(0{,}01y\,\mathrm{d}x + Z_k\,\mathrm{d}x)$$

neboli

$$v = V_k \int_0^x (0{,}01y + Z_k)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li na př. možno Z_k nastavit na hodnotu 1, 3, 5, 7, 9, je možno integrovat po $y = -1000$ až $+1000$, při čemž relativní chyba se zmenší na desetinu. Konstruktivně je jednotka provedena jako panelová, o normální výšce 5 p. j. = 225 mm a hloubce 300 mm. Na čelní stěně jsou kontrolní počitadla, signální žárovky jednotlivých servomechanismů a jejich 7pólové zástrčky (viz odst. 12.4) a vypinač, kterým se rozpojí mechanicky třecí převod při nastavování konstant a počátečních podmínek. Přívody a blokovací obvody jsou propojeny nožovými lištami.

12.3. Diagramová jednotka

Pro vytvoření mocnin a dalších libovolných funkcí jedné proměnné bude použito diagramové jednotky. Funkce, narýsovaná na perforovaném registračním papíru užitečné šířky 250 mm se vloží na válec, který se otáčí úměrně s jednou proměnnou, označenou u. Nad válcem se pohybuje rovnoběžně s jeho osou otáčení snímací hlavice, opatřená fotoelektrickým sledovacím zařízením. Fotoelektrické zařízení pracuje s rotující optikou, takže jeho činnost je nezávislá na osvětlení místnosti. Posuv hlavice sleduje pomocí pohybového šroubu narýsovanou křivku a přeměňuje se na otáčky výstupního hřídele v, opatřeného opět stupňovými převody V_k v poměru 1 : 3. Činnost lze tedy popsat výrazem:

$$v = V_k\, f(u)\,,$$

kde $f(u)$ je libovolná funkce, znázorněná na diagramu. Tentýž přístroj lze použít také pro zapisování výsledků, vymění-li se snímací hlavice za zapisovací pero. Pohybový šroub je pak poháněn druhým vstupem t. Diagramová jednotka zapisuje pak závislost dvou libovolných proměnných

$$t = f(u)\,.$$

Konstrukce je přizpůsobena tak, že je možno zapojit dvě diagramové jednotky za sebou. Na papír, procházející první jednotkou je zapisována nějaká funkce, která je snímáno jednotkou druhou s jistým zpožděním. Tímto jednoduchým způsobem je možno řešit úlohy s dopravním zpožděním. Konstrukce je opět panelová, výška 3 p. j. = 135 mm, hloubka 300 mm. Propojovací zástrčky a ostatní ovládací a kontrolní zařízení je obdobné jako u operační jednotky (odst. 12.2).

12.4. Elektrický přenos

Kromě těchto dvou typů jednotek, jejichž počet závisí na složitosti řešeného úkolu, obsahuje stroj ještě řídicí jednotku, která jednak otáčí všemi hřídeli nezávisle proměnné, jednak obsahuje blokovací obvod a zařízení k automatické regulaci rychlosti celého stroje. Dále je projektována jednotka napájecí, která obsahuje příslušné zdroje pro servomechanismy, přenášející otáčky mezi jednotlivými hřídeli, jak bude ještě popsáno dále. Kontrola libovolného servomechanismu a nastavování konstant či počátečních podmínek se děje pomocí další kontrolní jednotky, kterou lze připojit na kterýkoli servomechanismus. I tato jednotka je provedena jako panelová.

Poněvadž je ve stroji nutno zprostředkovat velký počet přenosů polohy jednotlivých hřídelů, byl zvolen a navržen výrobně jednoduchý servomechanismus, jehož princip je naznačen na obr. 3.

Na straně přijímací je stejnosměrný motorek M s permanentními magnety, který je tlumen nelineárními odpory R. Kotva motorku je připojena na kroužky m, n přijímacího kolektoru, který je opatřen 8 lamelami, z nichž vždy dvě protější jsou připojeny na jeden kroužek. Na lamely přiléhá 7 sběracích uhlíků a až g, které jsou přes odpory r připojeny na sedmipólovou zásuvku. Na vysílací straně je opět sedmipólová zásuvka, která je připojena k sedmi uhlíkům vysílacího kolektoru. Ten má na rozdíl od přijímacího pouze čtyři lamely, připojené přes kroužky m, n na dva póly baterie, jejíž střed je zaveden do všech jednotek stroje. Rozměry lamel jsou voleny tak, že jsou vždy napájeny tři nebo čtyři dráty napětími obou polarit. Na přijímací straně obdobně jsou na dvojici kroužků k, l resp. m, n připojeny vždy tři nebo čtyři lamely. Spojení se děje sedmižilovými kabely s příslušnými zástrčkami. Z podrobnějšího rozboru (6) plyne, že při nějaké poloze vysilače existuje $^1/_{28}$ otáčky přijimače, kdy je motor M bez napětí. Při větší odchylce dostává motor z jednoho konce a středu baterie a při ještě větší odchylce z obou konců baterie napětí takové polarity, že se otáčí směrem zmenšující se odchylky. Napětí na kroužcích k, l kontroluje velikost odchylky. Překročí-li tato $^3/_{28}$ otáčky, ztrácí obě vinutí relé Iaa Ib napětí, kontakt Ic odpadá a působí na zařízení, které automaticky řídí rychlost otáčení hřídelů nezávisle proměnné a tím i rychlost celého stroje. Signální žárovka ukazuje, který servomechanismus dosahuje této meze dovolené odchylky. Na diagramové jednotce je podobné zařízení, které hlídá odchylku od sledované čáry. Rovněž jsou blokovány koncovými spinači koncové polohy vyklonění proměnného převodu y operační jednotky a koncové polohy snímací nebo zapisovací hlavice diagramové jednotky. Ve stejném obvodu působí i zařízení, které hlídá správnou činnost fotoelektrické snímací hlavy. Řídicí jednotka, v níž jsou všechny tyto funkce realisovány, obsahuje kromě signalisace těchto stavů a příslušných ovládacích prvků pro ruční řízení stroje také nastavitelné počitadlo otáček, které vypíná stroj po uběhnutí nastaveného počtu otáček.

Sedmižilové kabely, kterými se provádí spojení stroje podle řešené úlohy, mají na přijímací straně dvojitou zástrčku s opačným zapojením sledu žil, čímž je umožněno měnit smysl otáček hřídelů a tedy i znaménko zobrazené proměnné. Na straně vysilače je rovněž dvojitá zástrčka, která umožňuje připojení několika kabelů na jeden vysilač, což je potřebné na př. při použití paralelního převodu z.

Poněvadž jednotky jsou universální, umožní velkou přizpůsobivost stroje k různým úkolům. Jeho výkonnost poroste plynule s počtem vyrobených jednotek, celkem počítáme s výrobou 30 jednotek, takže celkové rozměry stroje by byly $2600 \times 2000 \times 400$ mm, příkon celkem 1 kW. Předpokládá se řešení nelineárních diferenciálních rovnic do desátého řádu s šesti nelinearitami danými diagramy a se záznamem 2 libovolných funkcí. Osvědčí-li se tato koncepce je samozřejmě možné další rozšíření bez jakýchkoliv potíží.

Literatura

[1] V. Bush, The Differential Analyser. A new Machine for Solving Differential Equations. Journal of the Franklin Institute, Oct. 1931, s. 447—448.

[2] V. Hruška, Bushův integraf. Fysika v technice (1946), č. 1, str. 24.

[3] V. Bush, S. H. Caldwell, A New Type of Differential Analyser. Journal of the Franklin Institute (1945), No 4, str. 255-326.

[4] A. Svoboda, Elektromechanický diferenciální analysátor. Fysika v technice (1948), č. 1, str. 23.

[5] Th. Erismann, Eine neue Integrieranlage. Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik (1952), No 8/9, s. 242, 245.

[6] L. Hilgert, Návrh optimálního nelineárního servomechanismu, 1956. Diplomní práce. Fakulta elektrotechnická, ČVUT Praha.

Obr. 1. Kulový převod operační jednotky
Obr. 2. Náčrtek k odvození velikosti proměnného převodu.
Obr. 3. Funkční schema servomechanismu.

13. METHODA SYNTHESY PÁKOVÝCH MECHANISMŮ NA DIFERENCIÁLNÍM ANALYSÁTORU

Ing. Václav Černý, Doc. Ing. Dr Antonín Svoboda

Ústav matematických strojů ČSAV, Praha

Graficko-mechanické a numerické methody synthesy pákových (kloubových) mechanismů byly již popsány [1], [2], [3]. V této práci ukážeme methodu, užívající elektronkových operačních článků repetičního diferenciálního analysátoru.

13.1 Úvod

Čtyřkloubový rovinný mechanismus představuje často užívaný operační článek mechanických analogových strojů. Pracuje přitom jako generátor funkce jedné nezávisle proměnné. Má tyto výhodné vlastnosti: mechanisuje funkce dosti obecného typu, přenáší značné otáčivé momenty při zanedbatelných ztrátách třením, zaujímá malý prostor a je snadno a přesně vyrobitelný. Nevýhodou je obtížná synthesa mechanismu a skutečnost, že mechanismus generuje danou funkci

$$x_2 = f(x_1)\,, \quad x_{1m} \leqq x_1 \leqq x_{1M} \tag{1,1}$$

zpravidla ne zcela přesně. Generovaná funkce je dána výrazem

$$x_2 = f(x_1) + \delta x_2\,, \tag{1,2}$$

kde chyba δx_2, závislá na x_1, se nazývá strukturní chybou mechanismu. Tato chyba se dá různými methodami měnit tak, aby vyhověla určitým optimálním podmínkám, není však zpravidla možno ji zcela vyloučit.

13.2. Prvky čtyřkloubového mechanismu

Čtyřkloubový mechanismus (obr. 1) se skládá ze dvou klik o délkách g_1, g_2. Kliky jsou otočně uloženy na rámu v kloubech S_1, S_2, jejichž vzdálenost považujeme za jednotkovou. Volné konce klik T_1, T_2 jsou spojeny táhlem o délce $\overline{T_1T_2} = \sqrt{g_0}$. Natáčíme-li klikou g_1 v úhlu X_1, natáčí se klika g_2 v úhlu X_2 a platí

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= F(X_1)\,, \\ X_{1m} \leqq X_1 \leqq X_{1M}\,, &\quad X_{2m} \leqq X_2 \leqq X_{2M}\,, \\ \Delta X_1 = X_{1M} - X_{1m}\,, &\quad \Delta X_2 = X_{2M} - X_{2m}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2,1}$$

Při použití kloubového generátoru funkce rozhoduje tvar funkce F bez zřetele na velikosti intervalů ΔX_1, ΔX_2. Tento tvar vystihneme nejlépe, užijeme-li homogenních parametrů [1] podle vztahů

$$H_1 = \frac{X_1 - X_{1m}}{\Delta X_1}\,, \quad H_2 = \frac{X_2 - X_{2m}}{\Delta X_2}\,. \tag{2,2}$$

Závislost $H_2 = F(H_1)$, kterou obdržíme zavedením homogenních parametrů do (2,1), je graficky zobrazena čarou ve čtverci o jednotkové straně (obr. 2).

Užití homogenních parametrů si můžeme představit velmi názorně. Klika g_1 se pohybuje výlučně uvnitř intervalu ΔX_1. Na tento interval si promítneme rovnoměrně rozdělenou stupnici H_1 od nuly do jedné. Podobně si počínáme u kliky g_2. Na těchto stupnicích čteme pak přímo vzájemně přiřazené hodnoty homogenních parametrů H_1, H_2 pro libovolnou polohu klik.

Při methodě synthesy, kterou dále popíšeme, potřebujeme některé pomocné vztahy. Podle obr. 1 píšeme:

$$\left.\begin{aligned} U &= 1 + g_1 \cos(X_{1m} + H_1\,\Delta X_1) - g_2 \cos(X_{2m} + H_2\,\Delta X_2)\,, \\ V &= g_1 \sin(X_{1m} + H_1\,\Delta X_1) - g_2 \sin(X_{2m} + H_2\,\Delta X_2)\,, \\ g_0 &= U^2 + V^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{2,3}$$

Úloha, kterou řešíme, zní takto: Je dána funkce $H_2 = F(H_1)$. Hledáme sedm výtvarných parametrů $g_0, g_1, g_2, X_{1m}, X_{2m}, \Delta X_1, \Delta X_2$ tak, aby byly splněny rovnice (2,3) pro každé H_1.

Tato úloha je zpravidla neřešitelná, žádáme-li její přesné splnění. Musíme připustit strukturní chybu mechanismu, na př. tím, že v rovnicích (2,3) dovolíme malé změny veličiny g_0. Tuto veličinu můžeme vypočítat velmi snadno elektronkovými operačními články podle rovnic (2,3) a sledovat její změny v závislosti na ostatních šesti výtvarných parametrech i na proměnné H_1.

13.3 Operační síť stroje na synthesu čtyřkloubového mechanismu

Zapojení elektronkových operačních článků při provádění synthesy je na obr. 3. V tomto skupinovém schematu vytváří se nejdříve funkce podle rovnic (2,3). Pokusným nastavením šesti výtvarných parametrů obdržíme průběh g_0 jako funkci H_1 (což je v tomto případě nezávisle proměnná — čas). Veličina

g_0 nebude pravděpodobně konstantní. Abychom mohli pohodlně sledovat změny průběhu g_0, připojíme ještě další tři operační články: sčítačkou přičteme $-g_{0s}$, výsledek $\vartheta = g_0 - g_{0s}$ umocníme a integrujeme v intervalu $0 \leq H_1 \leq 1$. Na obrazovce čteme konečně výsledek integrace

$$\Theta = \int_0^1 \vartheta^2 \, \mathrm{d}H_1 . \tag{3,1}$$

Měníme-li hodnotu g_{0s} tak, aby Θ bylo minimální, bude konečná hodnota g_{0s} odpovídat střední časové hodnotě veličiny g_0. Hodnota Θ bude pak udávat integrál čtverců odchylek od střední hodnoty a bude tedy kriterium pro posouzení, s jakou přesností generuje mechanismus danou funkci. Pak měníme postupně hodnoty ostatních šesti výtvarných parametrů, a to vždy současně se změnou g_0, tak, aby Θ klesalo. Pokračujeme tak až do okamžiku, kdy je nemožné snížit Θ změnou kteréhokoliv parametru. Výtvarné parametry g_{0s}, g_1, g_2, X_{1m}, X_{2m}, ΔX_1, ΔX_2, při kterých jsme dosáhli minima Θ, definují mechanismus, který generuje danou funkci $H_2 = F(H_1)$. Chyba mechanismu se vyčíslí a uváží, zda mechanismus vyhovuje.

13.4. Závěr

Popsaná methoda se hodí přímo pro repetiční elektronkový diferenciální analysátor. Generátory funkcí užijeme obrazovkové s fotonásobiči. Vzhledem ke skutečnosti, že existuje zpravidla několik lokálních minim hodnoty Θ pro velmi různé kombinace výtvarných parametrů, není zaručeno, ke kterému řešení se dostaneme. V tomto ohledu mají výhodu methody graficko-mechanické.

Literatura

[1] A. Svoboda, Computing Mechanisms and Linkages, Radiation Laboratory Series M. I. T., Cambridge, Mass., Vol. 27. 1948.

[2] Z. Sh. Blokh, E. B. Karpin, Praktické metody synthesy rovinných čtyřkloubových mechanismů, Izdatelstvo Akademie nauk SSSR, Moskva-Leningrad 1943.

[3] E. B. Karpin, Atlas nomogramů, Izdatelstvo Akademie nauk SSSR, Moskva-Leningrad 1943.

Obr. 1. Rovinný čtyřkloubový mechanismus.
Obr. 2. Zobrazení závislosti $H_2 = F(H_1)$.
Obr. 3. Operační síť stroje na synthesu čtyřkloubového mechanismu.

14. POUŽITÍ HARMONICKÉHO ANALYSÁTORU V REGULAČNÍ TECHNICE

Prof. Dr Ing. ZDENĚK TRNKA
Laboratoř pro automatisaci a telemechaniku ČSAV

Ing. ZDENĚK KOTEK
ČVUT

14.1. Úvod

V tomto článku bude popsáno použití synchronního analysátoru v regulační technice. Jeho popis byl již uveřejněn v dřívějších publikacích [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Fotografii nového provedení analysátoru podává obr. 1. Přístrojem lze provádět analysu křivek napětí a proudů do frekvence 50 c/s. Generátorem lze vytvořit libovolnou křivku napětí z 24 pořadnic a tuto křivku buď přímo analysovat nebo ji lze použít pro napájení na př. vyšetřovaného obvodu (viz dále). Protože kolektory analysátoru jsou vlastně potenciometry, které nahrazují funkci sin νx stupňovou křivkou, lze též užít analysátoru napájeného stejnosměrným napětím jako generátoru napětí sin $(\omega t + \varphi_1)$, sin $(2\omega t + \varphi_2)$, ..., sin $(9\omega t + \varphi_9)$. Toto napětí lze užít pro vyfiltrování k synthese periodické křivky jak naznačuje obr. 2 a obr. 3.

14.2. Určování frekvenčních charakteristik součástí servomechanismů

Generátorem funkce vytvoříme periodickou nesinusovou funkci obsahující harmonické 1÷9. Základní frekvenci, t. j. otáčky analysátoru, volíme dostatečně nízké, abychom obdrželi ty body frekvenční charakteristiky, které pro nás mají důležitost. Výhodné je nastavit nesinusovou křivku takového tvaru, jehož Fourierovu řadu známe. Vektory harmonických výstupů dělené příslušnými vektory vstupních harmonických dávají pak body frekvenční charakteristiky, t. j.

$$G(\mathrm{j}\nu\omega_0) = \frac{A_\nu^2 e^{\mathrm{j}\varphi_\nu}}{A_\nu^1 e^{\mathrm{j}\psi_\nu}} .$$

Určení členů $G(\mathrm{j}0)$ lze provést odměřením stejnosměrné složky na výstupu a na vstupu a jejich přímým vydělením. Vhodnou volbou vstupní funkce lze dosáhnout stejnosměrné přesnosti v určování devíti bodů frekvenční charakteristiky. Pro vyšetřované součásti s derivačním charakterem volíme na př. vstupní křivku pilového tvaru, pro součásti s integrálním charakterem křivku blížící se impulsové funkci.

Vyšetřuje-li se na př. polohový servomechanismus, je výhodné na výstup připojit tachodynamko, čímž obdržíme derivaci výstupního průběhu, a podpoříme tím vyjádření vyšších harmonických a tím i zvýšení přesnosti.

Jako indikátoru pro určování harmonických se pro nízké frekvence servomechanismů osvědčil fluxmetr, u něhož lze při určování některé harmonické nechat proběhnout několik cyklů, čímž určíme střední hodnotu koeficientu A_ν za několik cyklů, t. j. eliminujeme nahodilé chyby.

14.3. Určování frekvenčních charakteristik z grafů vstupní a výstupní funkce

U některých zařízení nelze měřit frekvenční charakteristiku uvedeným způsobem. Na př. u zařízení, které jsou v trvalém provozu. V takových případech lze provést nějakou změnu vstupní veličiny, na což reaguje zařízení změnou výstupní veličiny. Obě veličiny, t. j. výstupní i vstupní, registrujeme přístroji. Jsou-li obě registrované funkce takové povahy, že existuje jejich Fourierova transformace, lze psát

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathcal{F}\{f_2(t)\}}{\mathcal{F}\{f_1(t)\}} ,$$

kdež

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t .$$

Kdyby průběhy $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$ nebyly transformovatelné podle Fourierovy transformace, lze též psát

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathcal{F}\{f_2'(t)\}}{\mathcal{F}\{f_1'(t)\}} = \frac{\mathcal{F}\{f_2''(t)\}}{\mathcal{F}\{f_1''(t)\}} .$$

14.4 Získání odezvy na daný průběh vstupu při daném průběhu frekvenční charakteristiky

Běžně užívaný způsob je ten, že se určí inversní Fourierův integrál k $G(\mathrm{j}\omega)$, který dává odezvu na jednotkový impuls. Pomocí konvolutorního integrálu se určí odezva na danou vstupní funkci.

Výhodněji lze řešit tuto úlohu pomocí zapojení uvedeného v obr. 2. Odečteme-li 9 vektorů z frekvenční charakteristiky na obr. 4 pro frekvence ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ..., t. j. $A_1 e^{\mathrm{j}\varphi_1}$, $A_2 e^{\mathrm{j}\varphi_2}$, ... lze sečtením těchto vektorů obdržet přímo na oscilografu odezvu daného systému na jednotkový impuls.

Nastavíme tedy na potenciometrech $P_1, P_2, \ldots$ amplitudy harmonických, na kartáčcích jejich úhly a na oscilografu pak obdržíme výstup při jednotkovém impulsu na vstupu.

K určení odezvy na daný vstupní signál lze postupovat tak, že signál (pokud existuje jeho Fourierova transformace) nastavíme na generátoru funkcí v takové délce, aby v posledních pořadnicích konvergoval k nule, t. j. aby $\int\limits_0^{\infty} f(t)$. $. \mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt$ bylo lze nahradit $\int\limits_0^{T} f(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt$ a určíme koeficienty Fourierovy řady pro délku periody T. Pro frekvence nalezených harmonických najdeme ve frekvenční charakteristice přenosy, jimiž násobíme nalezené harmonické vstupní funkce. Synthesou výstupních harmonických obdržíme odezvu na danou vstupní funkci.

14.5. Užití analysátoru k řešení polynomů

Je-li dán polynom tvaru

$$A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_0 = P \,,$$

kde koeficienty A_n jsou čísla reálná nebo komplexní, lze jej substitucí

$$z = r\mathrm{e}^{j\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

převést na tvar

$$A_n r^n \mathrm{e}^{jn\varphi} + A_{n-1} r^{n-1} \mathrm{e}^{j(n-1)\varphi} + \ldots + A_0 = P \,,$$

a když za φ položíme $\varphi = \omega t$ lze napsat

$$A_n r^n \cos n\omega t + A_{n-1} r^{n-1} \cos (n-1)\,\omega t + \ldots + A_0 = \mathrm{Re}\,\{P\} \,,$$

$$A_n r^n \sin n\omega t + A_{n-1} r^{n-1} \sin (n-1)\,\omega t + \ldots + A_1 \sin \omega t = \mathrm{Im}\,\{P\} \,.$$

Kdyby člen A_n byl komplexní $\bar{A}_n = A_n \mathrm{e}^{j\psi}$ projevilo by se to v reálné části členem $A_n \cos n(\omega t + \psi)$ a v imaginární části členem $A_n \sin n(\omega t + \psi)$.

Tyto vztahy lze realisovat pomocí analysátoru tak, že analysátor napájený stejnosměrným proudem je generátorem funkcí $\cos \omega t$ resp. $\sin \omega t$ i event. $\cos (\omega t + \psi)$, $\sin (\omega t + \psi)$. Obr. 5 ukazuje schema zapojení. Z analysátoru vycházejí napětí, obsahující kromě základních frekvencí ω, 2ω, 3ω, … ještě další harmonické. Ty jsou odfiltrovány filtry $F_1 \ldots F_9$. Za nimi jsou cejchované potenciometry k nastavení koeficientů $A_1 \ldots A_9$. Za nimi pak jsou funkční potenciometry $r, r^2, r^3, \ldots, r^9$ (pro rozmezí $r = 1 \div 0{,}5$). Za těmito potenciometry jsou pak kathodové sledovače s Görgesovými můstky, vyrábějící z daného napětí ještě napětí posunuté o 90°, t. j. z členů $\cos \omega t$ ještě $\sin \omega t$. Za těmito členy jsou napětí sčítána a to tak, že členy reálné jsou uvedeny na horizontální desky osciloskopu, imaginární členy jsou přiváděny na vertikální desky. Tím obdržíme na osciloskopu trajektorii pro všechny hodnoty $\omega t = 0 \div 360°$. K zjištění konkretní hodnoty $z = r\mathrm{e}^{j\omega t_1}$ slouží posouvač fáze, který z napětí první harmonické libovolně pošinuté vytvoří elektronkovým obvodem napěťový impuls, který přiveden na mřížku obrazovky osciloskopu, vyznačí na trajektorii svítící bod. Natáčením fáze posouvačem fáze lze svítící bod libovolně posunovat po trajektorii. Pro vyčíslení polynomu pro dané r, nastaví se toto na potenciometrech a dané t_1 na posouvači fáze. Koeficienty $A_1 \ldots A_9$ nastaví se na cejchovaných potenciometrech. Je-li A_n komplexní, nastaví se $|A_n|$ na potenciometrech, fáze pak na kartáčku analysátoru.

Na trajektorii oscilografu lze pak odečítat amplitudu a fázi polynomu P nebo složky $\mathrm{Re}\,\{P\}$ a $\mathrm{Im}\,\{P\}$. Člen A_0 nutno k výsledku přičíst nebo posunout osy o $\mathrm{Re}\,\{A_0\}$ ev. $\mathrm{Im}\,\{A_0\}$.

K řešení kořenů algebraické rovnice najdeme, kdy trajektorie prochází nulou změnou potenciometrů r^n. Když je toho dosaženo fázovým posouvačem přivedeme svítící bod do počátku a na jeho stupnici odečteme $\omega t_1 = \varphi$, a na potenciometrech čteme r, t. j. nalezneme kořen $z = r\mathrm{e}^{j\varphi}$. Vzhledem k tomu, že přístroj je ve stadiu zkoušek, nelze ještě popsat výsledky této methody.

14.6. Vyšetřování nelineárních regulačních obvodů

Analysátoru můžeme také použít k určování stability nelineárních regulačních obvodů pomocí frekvenčních charakteristik. Odměříme ekvivalentní frekvenční charakteristiku nelineární části obvodu a frekvenční charakteristiku zbývající lineární části. Jejich vzájemná poloha určuje stabilitu obvodu. Je to způsob určování stability, spočívající na methodě harmonické rovnováhy [7, 8, 9, 10].

Předpokládejme blokové schema podle obr. 6, kde $G_L(\mathrm{j}\omega)$ znamená přenos lineární části obvodu, t. j.

$$G_L(\mathrm{j}\omega) = \frac{X_3(\mathrm{j}\omega)}{X_2(\mathrm{j}\omega)}$$

a $G_N(A, \omega)$ je ekvivalentní přenos nelineární části. Tento přenos stanovíme takto.

Předpokládejme, že na vstupu nelineárního prvku je sinusový signál

$$x_1 = A \sin \omega t \,.$$

Pak na výstupu tohoto prvku je obecně nesinusový průběh daný jeho nelineární charakteristikou $x_2 = N(x_1)$, t. j.

$$x_2 = N(A \sin \omega t) \,.$$

Tento výstupní signál nahraďme jeho první harmonickou. Tato aproximace je pro většinu případů oprávněná, protože zbývající lineární část regulačního obvodu má obvykle přenos odpovídající charakteristice nízkofrekvenčního filtru, takže vyšší harmonické jsou tlumeny.

Použijeme-li symbolického vyjádření sinusových průběhů rotačními vektory, dává nám poměr první harmonické na výstupu k sinusovému vstupu t. zv. ekvivalentní přenos nelineárního prvku

$$G_N(A, \omega) = \frac{X_2(A, \omega)}{X_1(A, \omega)} .$$

Tento přenos je funkcí nejen frekvence ω, ale i amplitudy A vstupního signálu, zatím co u lineárních členů je, jak známo, přenos $G_L(j\omega)$ funkcí jen frekvence ω.

Existence oscilací v daném obvodu je dána rovnicí

$$G_N(A, \omega)\, G_L(j\omega) + 1 = 0 . \tag{14.1}$$

Upravíme-li tuto rovnici do tvaru

$$-G_L(j\omega) = \frac{1}{G_N(A, \omega)} = G_N^{-1}(A, \omega) , \tag{14.2}$$

určuje průsečík záporné frekvenční charakteristiky lineární části $-G_L(j\omega)$ s ekvivalentní inversní frekvenční charakteristikou nelineární části $G_N^{-1}(A, \omega)$ amplitudu A i frekvenci ω možných kmitů.

Hlavním problémem této methody je stanovení ekvivalentní frekvenční charakteristiky $G_N^{-1}(A, \omega)$ nelineárního prvku. V uvedené literatuře [7, 8, 9, 10] se uvažují především nelineární prvky, které mají přenos závislý jen na amplitudě, t. j. prvky u nichž výstupní signál závisí jen na průběhu vstupního signálu a nezávisí na jeho derivacích ani integrálech. Pro některé typické nelineární charakteristiky odpovídající takovýmto prvkům jsou spočteny příslušné přenosy $G_N(A)$. Pro jiné případy je nutno provádět mnohdy velmi pracné výpočty.

Význam použití analysátoru je v tom, že tuto ekvivalentní charakteristiku nelineárního prvku můžeme přímo měřit. Zapojení analysátoru je na obr. 7. Na vstup měřeného nelineárního prvku je přivedeno sinusové napětí u_1 z generátoru funkce. Jeho amplitudu A je možno nastavit stejnosměrným napětím U_n, frekvenci ω nastavením otáček pohonného motoru M. Výstupní napětí u_2 je přivedeno na kolektor odpovídající první harmonické, takže měřicí přístroj na výstupu analysátoru měří amplitudu a fázi první harmonické výstupního signálu u_2 nelineárního prvku. Vzhledem k tomu, že při vyšetřování regulačních obvodů se měření provádí při velmi nízkých frekvencích, používá se na výstupu jako měřicího přístroje fluxmetru. Odečtení údaje fluxmetru se provede po proběhnutí několika cyklů.

Měření provedeme vždy pro několik hodnot vstupní amplitudy A při konstantní frekvenci ω (t. j. konstantních otáčkách analysátoru). Do komplexní roviny na obr. 8 vyneseme takto zjištěný přenos $G_N^{-1}(A, \omega)$ a dostaneme soustavu křivek o parametru ω a okótovaných hodnotami vstupní amplitudy A. Do téže roviny nakreslíme přenos lineární části $-G_L(j\omega)$, který můžeme na př. stanovit způsobem uvedeným v odstavci 14.2.

Ustáleným oscilacím odpovídají podle rovnice (14.2) průsečíky charakteristik $G_N^{-1}(A,\omega)$ a $-G_L(j\omega)$, kde souhlasí frekvence ω na obou charakteristikách. Toto ω a amplituda A odečtené na charakteristikách $G_N^{-1}(A, \omega)$ určují frekvenci a amplitudu těchto oscilací. Rozborem rovnice (14.2) určíme v nakreslených frekvenčních charakteristikách, který z průsečíků odpovídá stabilním a který nestabilním oscilacím.

Při použití analysátoru je možno také zhodnotit vliv vyšších harmonických přesunutím kartáčku na kolektor příslušné harmonické.

Literatura

[1] Z. Trnka, Harmonický analysátor napětí a proudu, Elektrotechn. obzor 31 (1942), 49—52.

[2] Z. Trnka, Die harmonische Analyse von Spannungs- und Stromkurven, Arch. Elektrotechn. 36 (1942), 123—130.

[3] Z. Trnka, Analysa empirických křivek, Elektrotechn. obzor 35 (1946), 221—229.

[4] Čs. patent 74020.

[5] DRP 742 445.

[6] Z. Trnka, Přednáška v ESČ 1940.

[7] Goldfarb, O nekotorych nelinejnostjach v sistemach avtomatičeskogo regulirovanija, Avtomatika i telemechanika, T. VIII, No 5, str. 349—383, 1947.

[8] Tustin, The Effects of Backlash and of Speed-Development Friction on the Stability of Closed-cycle Control Systems, J. Inst. Elec. Engrs. (London), Vol. 94, Part IIA, No 1, May 1947.

[9] Oppelt, Locus Curve Method for Regulators with Friction, J. Inst. Elec. Ergers (London), Vol 94, Part IIA, May 1947.

[10] Kochenburger, A Frequency Response Method for Analysing and Synthesing Contactor Servomechanisms, Trans. AIEE, Vol. 69, Part I, str. 270—284, 1950.

Obr. 1. Fotografie nového provedení analysátoru.
Obr. 3. Fotografie analysátoru pro synthesu periodické křivky.
Obr. 4. Frekvenční charakteristika.
Obr. 5. Schema zapojení analysátoru pro řešení polynomů.
Obr. 6. Blokové schema regulačního obvodu s nelineárním prvkem.
Obr. 7. Schema zapojení analysátoru pro určení ekvivalentní frekvenční charakteristiky nelineárního prvku.
Obr. 8. Ekvivalentní frekvenční charakteristiky nelineárního prvku.

15. ELEKTRONICKÉ METHODY ANALOGICKÉHO VÝPOČTU

Ing. Bohumil Mirtes

VÚT Praha

15.1. Úvod

Se stoupajícími nároky na regulaci se přirozeně zvyšují i požadavky na aparát používaný k analyse a synthese zpětnovazebních obvodů. Pokud jde o regulátory s jakkoliv složitou kombinací lineárních či — přesněji řečeno — „téměř lineárních" prvků, nečiní ovšem řešení potíží: Dobře známá frekvenční metoda je velmi účinný a pružný nástroj, který se dá snadno uplatnit i u těch nejnáročnějších systémů. Pro regulátory s několika podstatnými nelinearitami naproti tomu jednoduché matematické či matematicko-grafické řešení prakticky neexistuje, třebas se na methodách řešení nelineárních systémů pracuje s velkým úsilím. Mnohem výhodnější je sáhnout v tom případě k poloexperimentálním methodám a matematický přístup k analyse a synthese doplnit řešením na modelech.

Zařízení používaná k modelování regulátorů jsou — s hlediska jejich funkce v procesu analysy a synthesy — analogické počítače určené k řešení lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů. Použití analogických počítačů tohoto druhu se ovšem uplatňuje nejen v regulační theorii a technice, ale i v řadě dalších oborů vědy a techniky a také se neomezuje jen na účast při výpočtu: Vřazením universálních i specialisovaných analogických počítačů do složitých zpětnovazebních systémů se podařilo automatisovat velmi náročné výrobní, kontrolní i měřicí procesy. Tento způsob použití je sice teprve v počátcích svého rozvoje, ale otvírá — o tom není pochyby — automatisačním snahám nové cesty.

Požadavky na modelující analogické počítače se přes velký rozsah aplikací analogického výpočtu v mnoha ohledech shodují. A je přirozené, že s růstem potřeby nároky stoupají: Ať se jedná o kteroukoliv úlohu — o modelování přístrojových servomechanismů či automatického řízení letadla nebo o transformaci souřadnic v automatisovaném přistávacím zařízení a o další a další použití — žádá se téměř vždy co největší přesnost řešení, spolehlivý chod, malé nároky na obsluhu, kromě toho je obyčejně velmi důležitá pružnost a všestrannost počítací sítě a možnost vřazení počítače do reálného systému, a rozhoduje i cena a náročnost výroby. Daleko největší počet těchto podmínek splňují elektronické analogické počítače s jednorázovým řešením. To plyne ze zběžného studia možností jednotlivých analogických method a dokazuje to i světový směr vývoje analogických počítačů dokumentovaný vedle mnoha a mnoha jiných zpráv přednáškami a diskusí na II. všesvazové konferenci o theorii automatické regulace [1]. V usnesení, které bylo na této konferenci přijato, je kromě toho zdůrazněn rozhodující význam analogického výpočtu pro další rozvoj regulace a k splnění automatisačních úkolů sovětského průmyslu je požadováno podstatné rozšíření výzkumných a vývojových prací v oboru analogického výpočtu a zavedení kvalitních elektronických počítačů do seriové výroby. Tyto závěry platí ovšem i pro naše hospodářství. Práce na analogických počítačích nebude nutno teprve zahajovat — v mnoha případech se bude moci vyjít z výsledků dosažených ve Výzkumném ústavu telekomunikací (VÚT).

Cílem základních i aplikačních výzkumných prací, které VÚT počítačům věnoval, bylo zvládnout hlavní methody elektronického analogického výpočtu a vyvinout řadu prvků a součástí i elektronických dílů a přístrojů vhodných k sestavení velmi přesných elektronických analogií několika základních úloh algebraického i diferenciálního počtu. V rozsahu úloh, o které šlo, jsou v podstatě zahrnuty i operace, jež je nutno použít při řešení regulačních systémů. Aby byla dále kryta i potřeba počítacích zařízení pro přímé užití v automatisovaných procesech, byly elektronické analogie doplněny analogiemi elektromechanickými, které umožňují velmi přesně řešit i nelineární úlohy s úzkopásmovým dobře tlumeným průběhem závisle i nezávisle proměnných, a kromě toho byly vyvinuty i servomechanismy vhodné pro transformaci elektrických veličin na veličiny mechanické. Při konstrukci všech počítacích prvků a částí se vyšlo z perspektivních principů známých z literatury a ty byly na místech, kde publikovaná řešení nevyhovují či nepostačují doplněny výsledky původních výzkumných prací.

15.2. Lineární úlohy

Ve většině aplikací analogického počítače se vyžaduje řešení čistě lineárních úloh. Jde o kombinaci operací, jakými jsou změna znaménka, násobení a dělení konstantou, součet a rozdíl, integrace a derivace, při nichž vztah mezi vstupem a výstupem řešení nezávisí na amplitudě vstupu. Všechny lineární operace se v elektronickém analogickém počítači modelují spolehlivě a přesně pomocí stejnosměrného počítacího zesilovače se silnou zápornou zpětnou vazbou [2]. Návrh vhodného počítacího zesilovače není sice nikdy snadnou záležitostí, ale hlavní problém — odstranění pomalých změn stejnosměrné hladiny výstupního napětí způsobených driftem, to je kolísáním pracovních potenciálů elektrod elektronek a napájecích napětí — byl již spolehlivě zvládnut objevením principu automatického nulování.

Sanitized Copy Approved for Release 2010/04/14 : CIA-RDP80T00246A038200360001-8

15.2.1. Analysa počítacího zesilovače s automatickým nulováním

Stejnosměrný počítací zesilovač s automatickým nulováním má proti zesilovači bez nulování navíc střídavou zesilující větev označenou v blokovém schematu na obr. 1 příslušným přenosem $k_{st}y_{st}$. Střídavá (st) větev složená z modulátoru, který převádí stejnosměrné (ss) chybové napětí u zesilovače na úměrné st napětí, ze zesilovače modulovaného napětí a z demodulátoru, použitého k zpětnému převodu zesíleného modulovaného napětí na napětí stejnosměrné, zvyšuje zesílení ss zesilující větve $-k_{ss}y_{ss}$ o hodnotu přenosu $k_{st}y_{st}$, který není driftem ovlivněn, a tím snižuje stejnou hodnotou vliv driftu ss větve. Ten je ve schematu vyznačen ekvivalentním napětím u_r na vstupu do ss větve. Do napětí u_r lze ovšem zahrnout i vliv všech ostatních rušivých napětí, jež se do počítacího zesilovače dostávají v jeho zesilující části.

Vztah pro nulovací účinek st větve a ostatní hlavní údaje o funkci počítacího zesilovače plynou z rovnice pro výstupní napětí u_0

$$u_0 \doteq -\left[u_i\frac{Z_0}{Z_i} + u_r\frac{Z_0+Z_i}{Z_i}\frac{1}{(1+k_{st}y_{st})} + i_rZ_0\right]\frac{ky(p)}{1+ky(p)} \tag{1}$$

odvozené řešením obecného blokového schematu na obr. 1. Tuto rovnici, v níž výraz $ky(p)$

$$ky(p) = [1 + k_{st}J_{st}(p)]\,k_{ss}y_{ss}(p)\frac{Z_i(p)}{Z_0(p)+Z_i(p)} \tag{2}$$

značí přenos otevřené smyčky zesilovače, lze pro užitečné pásmo frekvencí zjednodušit na přibližný tvar

$$u_0 = -u_i\frac{Z_0}{Z_i} - u_r\frac{Z_0+Z_i}{Z_i}\frac{1}{(1+k_{st}y_{st})} - i_rZ_0\,. \tag{3}$$

Aproximace platí pro ss signál a ostatní frekvence, na nichž je $ky(p)$ dosti vysoké, aby

$$\frac{ky(p)}{1+ky(p)} \doteq 1\,. \tag{4}$$

Zjednodušená rovnice ukazuje, že výstupní napětí počítacího zesilovače je složeno ze tří složek: První, $-u_i\,.\,Z_0/Z_i$, představuje užitečný signál rovný žádané lineární funkci vstupního napětí a druhé dvě účinek rušení.

Na přenos užitečného signálu má, jak vidět, vliv pouze poměr obou impedancí ve zpětné vazbě. Jak určit volbou Z_i a Z_0 charakter přenosu a tím i funkci zesilovače v analogickém výpočtu, to ukazuje přehledně tabulka I. První čtyři řádky tabulky definují zapojení zpětné vazby k získání analogií inverse, násobení konstantou, derivace a integrace. V dalších řádcích jsou uvedena zapojení analogií ostatních důležitých lineárních operací.

V rušivém obsahu výstupního napětí se projevuje jednak účinek driftu a ostatního napěťového rušení u_r a jednak účinek rušivého proudu i_r, do něhož je zahrnut mřížkový proud vstupní elektronky ss větve a ostatní proudy, které tekou z místa vstupu zesilujících větví (bod A v blokovém schematu na obr. 1) jinam než do impedancí Z_i a Z_o. St větev má, jak ukazuje rovnice (3), velmi příznivý vliv na rušení driftem: Potlačuje je téměř úplně maximální hodnotou úzkopásmového zesílení $k_{st}y_{st}$. Tím je odstraněn hlavní nedostatek ss zesílení, který je jinak nutno kompensovat nákladnou stabilisací zdrojů, speciálním zapojením vstupních obvodů ss větve a kromě toho nezbytným častým ručním nulováním zesilovače. Na rušení vlivem i_r nemá naproti tomu nulovací st větev žádný účinek, a proto je nutno snížit proud i_r na minimální hodnotu vhodnou konstrukcí obvodů vstupní elektronky.

Matematické odvození informací o pochodech v počítacím zesilovači lze podepřít fysikálním názorem, jehož osvojení je pro práci s elektronickými analogickými počítači velmi důležité. Jde o to uvědomit si, že bod A v blokovém schematu je pro všechny důležité frekvence téměř přesně na potenciálu země. Toto „virtuální uzemnění" styčného bodu impedancí Z_i a Z_o je zajištěno vysokým kombinovaným zesílením obou elektronických větví zesilovače. Proč, to je jasné: Nejsou-li zesilující větve zahlceny, jejich mnohatisícové zesílení předpokládá i při dosti vysokém výstupním napětí několika desítek voltů téměř zanedbatelný vstupní signál v bodě A neboli přibližné uzemnění tohoto bodu. Pomocí předpokladu o virtuální zemi se snadno odvodí vztah pro přenos signálu u_i: Signál u_i je zaveden na odpor Z_i, kterým tudíž protéká proud u_i/Z_i; tento proud teče do impedance Z_o a výstupní napětí zesilovače má proto hodnotu $-u_iZ_o/Z_i$. Že impedancí Z_o teče kromě toho i proud i_r, to plyne ze stejného předpokladu. A jednoduchý je i názor na účinek driftu: Vyjde-li se z případu nulového vstupního signálu a nulového rušivého proudu, stačí pro určení velikosti rušivého výstupního napětí, způsobeného driftem, převést předpoklad o virtuálním uzemnění do bodu B blokového schematu a sečíst napětí v okruhu z A do B; součet chybového napětí v bodu A, rovného $u_o'Z_i/(Z_0+Z_i)$, napětí u_r a výstupního napětí st větve je roven nule,

$$u_o'\frac{Z_i}{Z_o+Z_i} + u_r + u_o'\frac{Z_i}{Z_o+Z_i}k_{st}y_{st} = 0 \tag{5}$$

a z toho rušivé výstupní napětí u_o'

$$u_o' = -u_r\frac{Z_o+Z_i}{Z_i}\frac{1}{1+k_{st}y_{st}}\,. \tag{6}$$

15.2.2. Otevřená smyčka počítacího zesilovače

Všechny základní úvahy o počítacím zesilovači, plynoucí ze zjednodušené rovnice (3) či z fysikálního názoru, platí přesně pro pásmo frekvencí, v němž má přenos otevřené smyčky $ky(p)$ zesilovače velmi vysokou hodnotu — na příklad několik desítek tisíc — a vliv výrazu $ky/(1 + ky)$ na funkci zesilovače lze zanedbat. Hlubší analysa, zabývající se chybami v analogickém výpočtu a otázkami stability zesilovače, s tímto zjednodušením ovšem nevystačí. V obou případech je nutno všimnout si důkladněji funkce $ky(p)$. Nejlépe je při tom postupovat frekvenční methodou.

Všechny informace důležité pro analysu zesilovače — a přirozeně i pro synthesu jeho elektronických větví — jsou obsaženy v amplitudové charakteristice otevřené smyčky. Charakteristika funkce $ky(p)$ jednoho z počítacích zesilovačů vyvinutých ve VÚT, použitého k sčítání je na obr. 2a a charakteristika téhož zesilovače, zapojeného jako integrátor je na obr. 2b. Obě charakteristiky jsou sestrojeny způsobem patrným v diagramech z dílčích charakteristik funkcí $k_{s}y_{s}$ a $k_{ss}y_{ss}$, jež jsou pro obě zapojení stejné, a z charakteristiky funkce $L_i/(Z_0 + Z_i)$, jež má v případě sčítání hodnotu $\frac{1}{5}$ a v případě integrace tvar $pCR/(1 + pCR)$.

Podmínka, týkající se zajištění bezpečné stability, určuje průběh amplitudových charakteristik $ky(p)$ v širokém okolí Nyquistova bodu: V této oblasti musí mít amplitudová charakteristika sklon -20 dB/dekádu. Velkou amplitudovou bezpečnost je nutno zajistit nejen pro možnost značných změn v zesílení způsobených stárnutím elektronek, ale i proto, aby byla možná široká změna impedancí Z_i a Z_o.

Pro řešení otázek přesnosti je důležitá frekvence jednotkového zesílení v grafu $|ky(j\omega)|$ a průběh grafu směrem k nulové frekvenci. V zásadě má být zesilovači ponechána v co nejširším pásmu vysoká stejnosměrná hodnota zesílení k_{s} a k_{ss} přenosu obou jeho zesilujících větví a mezná frekvence zesilovače, rovná zhruba frekvenci bodu jednotkového zesílení, má být co nejvyšší. Ani jeden, ani druhý požadavek nelze splnit dokonale. To se ovšem projeví chybami v analogickém výpočtu.

15.2.3. Přenos sumačního zesilovače

Přenos zesilovače v zapojení upraveném pro součet napětí u_1, u_2, u_3 a u_4 má sice podle tabulky I tvar

$$u_0 = -\left(u_1 \frac{R_0}{R_1} + u_2 \frac{R_0}{R_2} + u_3 \frac{R_0}{R_3} + u_4 \frac{R_0}{R_4}\right), \tag{7}$$

ale ten je nutno poopravit úvahou o odchylkách funkce $ky/(1 + ky)$ od předpokládané jednotkové hodnoty. Amplitudu těchto odchylek $\Delta(j\omega)$ lze v pásmu nižších frekvencí, kde $|ky(j\omega)|$ je dosti vysoké, určit na základě přibližného vztahu

$$\Delta(j\omega) = 1 - \left|\frac{ky(j\omega)}{1 + ky(j\omega)}\right| \doteq \frac{1}{|ky(j\omega)|} \tag{8}$$

z příslušné amplitudové charakteristiky přenosu otevřené smyčky sumačního zesilovače. Odchylka Δ zesilovače s charakteristikami na obr. 2a a kteréhokoliv kvalitního zesilovače s nulováním nestoupne na příklad až do frekvence 100 Hz nad zanedbatelnou hodnotu 0,1%. S růstem frekvence však velikost odchylky rychle stoupá a v okolí mezné frekvence ω_{bs} nastává dokonce přechod mezi stavem, kdy $ky/(1 + ky) = 1$ a druhým stavem, kdy — pro $|ky(j\omega)| < 1$ — se $ky/(1 + ky)$ blíží hodnotě ky. To jinými slovy znamená, že v bodě mezné frekvence ω_{bs} jednotková nízkofrekvenční asymptota amplitudové charakteristiky funkce $ky/(1 + ky)$ přechází ve vysokofrekvenční asymptotu charakteristiky funkce ky se sklonem -20 dB/dekádu, takže — vyjádřeno analyticky

$$\frac{ky(p)}{1 + ky(p)} \doteq \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\omega_{bs}}}. \tag{9}$$

Odpovídajícím způsobem by se měla upravit i základní idealisovaná rovnice (7): Výsledný vztah

$$u_0 = -\left(u_1 \frac{R_0}{R_1} + u_2 \frac{R_0}{R_2} + u_3 \frac{R_0}{R_4} + u_4 \frac{R_0}{R_4}\right) \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\omega_{bs}}} \tag{10}$$

je přijatelně reálný obraz pochodů sumačního zesilovače pro mnohem širší pásmo frekvencí. Totéž platí pro všechna zapojení počítacího zesilovače, v nichž $Z_0 = R_0$ nebo kdy v Z_0 složeném z více prvků lze nalézt dráhu z bodu A k výstupu zesilovače, jež vede jen přes reálné odpory.

K chybám způsobeným odchylkami funkce $ky/(1 + ky)$ od jednotkové hodnoty je nutno ovšem přičíst vliv nepřesností poměru Z_0/Z_i. U sumačního zesilovače lze chybu z této příčiny obyčejně zanedbat, neboť poměr dvou odporů — jsou-li vinuty z dobrého odporového materiálu a dobře stárnuty — se bez větších potíží udrží v toleranci několika setin procenta.

15.2.4. Přenos integračního zesilovače

Jak ukazuje graf na obr. 2b, klesá v případě integračního zesilovače amplituda přenosu otevřené smyčky nejen na vysokých frekvencích, ale i směrem k stejnosměrnému signálu. Je-li použito automatické kompensace účinku driftu, dochází ovšem k dolnofrekvenčnímu odřezu přenosu na tak nepatrné frekvenci (pro uvažovaný integrační zesilovač v okolí $\omega_a \doteq 10^{-7}\,s^{-1}$), že se dokonce dříve uplatní časová konstanta použitého kondensátoru, třebas dosahuje u kvalitních styroflexových kondensátorů vysoké hodnoty $T_c \doteq 5 \,.\, 10^5$ s. Přenos integračního zesilovače má proto — uvažováno přesněji — tvar

$$u_0 = -u_i \frac{1}{RCp} \frac{T_c p}{1 + T_c p} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{bi}}} \qquad (11)$$

Příslušným způsobem by se měly při přesné analyse upravit i přenosy všech aplikací počítacího zesilovače, v nichž dráha impedancí Z_0 z bodu A k výstupu zesilovače vede vždy přes nějaký kondensátor.

Pokud jde o přesnost časové konstanty RC, je nutno počítat s chybami několikrát většími než při reálném přenosu R_0/R_i. Nejlepší poměry jsou při použití odporů z Nichromu a styroflexových kondensátorů, neboť tepelný koeficient obou těchto materiálů má zhruba stejnou hodnotu — asi $1{,}5 \,.\, 10^{-4}$/°C — a opačné znaménko. I v tom případě se nastavená hodnota udrží stěží v mezích $\pm 0{,}05\%$.

15.2.5. Počítací zesilovače konstruované ve VÚT

Z naznačené obecné analysy funkce a přesností počítacího zesilovače, jejíž některé stránky jsou podrobněji rozvedeny v [2], plynou všechny potřebné směrnice pro řešení hlavních praktických otázek návrhu a konstrukce. Běží především o počet a druh zesilujících stupňů ve st a ss elektronické větvi zesilovače a speciálně o obvody vstupního a koncového stupně ss větve, dále o realisaci požadovaného frekvenčního průběhu přenosů obou větví, o návrh kombinované počítací sítě, která by umožnila rychlé a přehledné určení funkce zesilovače v analogickém výpočtu, a konečně o požadavky na zdroje napájecích napětí. Tyto problémy mohly být v zesilovačích konstruovaných ve VÚT zvládnuty celkem úspěšně. Přispělo k tomu hlavní měrou použití kvalitních potenciometrů a vhodných vibračních relé.

Technika výroby přesných potenciometrů, vyvinutá ve VÚT, umožňuje navíjet „kompensované" potenciometry, jež mají dokonale lineární přenos i se zátěží jen několikrát větší než celkový odpor vinutí. Toho se dociluje výrazně nelineárním průběhem vinutí podle zásad patrných z diagramu na obr. 3. S kompensovanými potenciometry není těžko sestavit bez složitého systému přepínaných odporů velmi pružnou počítací síť o vysokém vstupním odporu, který příliš nezatíží koncový stupeň zesilovače. Jednoduchý případ počítací sítě s kompensovanými potenciometry je na obr. 4. Minimální vstupní odpor je větší než 80 kΩ, zesílení lze měnit od 0 do značně vysoké hodnoty a časovou konstantu integrace od 1 s výše. Síť není příliš náročná na stínění — oba pevné odpory nemusí mít obvyklou hodnotu mnoha megohmů — a zvlášť výhodný je ovšem poměrně malý příkon potřebný k jejímu vybuzení. To usnadňuje konstrukci koncového stupně: Stačí běžné zapojení elektronky o malé anodové ztrátě a s malým odběrem z napájecích zdrojů.

Vibrační relé (konstruované rovněž ve VÚT) se uplatnilo úsporami v konstrukci obou zesilujících větví a zčásti i snížením požadavků na stabilisaci napájecích napětí. Hrají tu roli dvě stránky jeho konstrukce (fotografie na obr. 5), a to předně vysoká mechanická resonanční frekvence vibrujícího systému, jež umožňuje zvýšit modulační frekvenci, na příklad na 400 Hz, a dále možnost volby vhodného spínacího režimu. Vysoká modulační frekvence rozšiřuje pásmo účinku zesílení $k_{st}y_{st}$ proti běžné modulaci frekvencí sítě téměř o řád — tedy do oblasti kolem 100 Hz — a přispívá tak k účinnějšímu využití zesílení st větve a tím i k snížení nároku na zesílení ss větve. Aby hodnotu k_{st} bylo možno volit bez nebezpečí nestability st větve potřebně vysokou, toho se dosáhne seřízením kontaktů relé na přepínání s vyloučením intervalu, kdy by vibrující kontakt nebyl ve styku s žádným z obou pevných kontaktů. Správným seřízením relé se zabrání napětí st větve zesílenému výstupnímu napětí proniknout přes relé do vstupu. To je velmi důležité: Bez oddělení výstupu od vstupu by bylo třeba do st větve zařadit lichý počet zesilovacích stupňů a to by vedlo kromě nehospodárnosti k dalším komplikacím se získáním kladné polarity přenosu $k_{st}y_{st}$.

Snížené nároky na zesilující obvody se projeví úsporami v počtu elektronek, v rozměrech a odběru koncového stupně ss větve a v požadavcích na napájecí zdroje. Schemata dvou úsporně řešených počítacích zesilovačů konstruovaných ve VÚT jsou na obr. 6 a 7. Co do vlastností se od sebe liší hlavně výkonovými možnostmi koncového stupně (při stejném rozsahu výstupního napětí ± 100 V je minimální zátěž v prvém případě 40 kΩ, v druhém 10 kΩ) a hodnotami zesílení obou elektronických větví (v druhém případě jsou zesílení více než dvojnásobná, $k_{st} \doteq 1000$, $k_{ss} \doteq 10\,000$). Zlepšených vlastností druhého z obou zesilovačů se dosáhlo zvětšením počtu elektronek — dva triodové systémy byly nahrazeny dvěma pentodami, takže místo dvou elektronek prvního zesilovače jsou použity tři elektronky — a přirozeně i zvýšením ss příkonu do koncového stupně.

Při detailním řešení elektronické části počítacího zesilovače nejde jen o otázky, týkající se úsporné realisace žádaných zesílení a potřebného výkonu, ale je nutno věnovat pozornost také konstrukci vstupních obvodů ss větve, které rozhodují o velikosti ss rušivého proudu i_r a o driftu zesilovače. Pokusy s potlačením proudu i_r musí vycházet z experimentálního určení jeho zdrojů: Pokud se tu projevuje svod z bodu A blokového schematu k přívodům anodového napětí ve spodku první elektronky, pomůže důkladná úvaha o umístění a isolaci všech vodičů bodu A a o udržení čistoty spodku elektronky. Větší úlohu hraje v i_r obyčejně podíl mřížkového proudu, ale i ten lze snížit volbou pracovního bodu elektronky theoreticky na nulu. To plyne ze závislosti mřížkového proudu triody 6CC41 — a kterékoliv jiné zesilující elektronky — na předpětí mřížky (obr. 8). Nastavení pracovního bodu se ovšem během provozu mění; hlavní příčinou změn je kolísání žhavicího napětí.

Oba zesilovače VÚT, o nichž byla řeč, udržují proud i_r v mezích $\pm 10^{-9}$ A. K dosažení potřebné stabilisace pracovního bodu vstupní elektronky, který byl volen s ohledem na malý mřížkový proud podle zásad odvozených z diagramu na obr. 8, bylo nutno použít dobře regulovaného zdroje žhavicího napětí: Nejvyšší povolená změna žhavicího napětí nepřesahuje 2%, ať ji způsobuje kolísání v síti či proměnný žhavicí odběr. Toleranci $|i_r| \lesssim 10^{-9}$ A není pravděpodobně možno s normálními elektronkami dále podstatně snížit.

Regulace žhavicího napětí první elektronky má příznivý účinek i na celkový přenos konstantního signálu, neboť chyby v nulování zesilovače — potlačené ovšem účinkem st větve — způsobuje v podstatě drift vstupních obvodů ss větve. Kdyby byla na vstupu zesilovače jednoduchá trioda, bylo by třeba při změně žhavicího napětí o 10% počítat s driftem ekvivalentním přírůstku rušivého napětí u_r o 0,1 V. K podstatnému snížení driftu byl do vstupu zesilovačů vřazen místo jednoduché triody symetrický obvod, vhodný kromě toho i k sečtení napětí $u + u_r$ s napětím $uk_{st}y_{st}$. Tímto detailem konstrukce — doplněným regulací žhavení — je při dostatečné síle větve $k_{st}y_{st}$ zaručena dlouhodobá stabilita nulování: Drift výstupního napětí obou zesilovačů VÚT v zapojení s jednotkovým přenosem nepřesahuje mez 1 mV.

A konečně několik slov o realisaci žádaného frekvenčního průběhu obou zesilujících větví. Potřebný pokles přenosu st větve se provede pomocí jednoduchého dolnopropustného členu RC vřazeného za demodulátor. Aby se současně zajistila i potřebná filtrace demodulovaného napětí, je nutno volit časovou konstantu RC tak, aby amplituda funkce $k_{st}y_{st}(j\omega)$ poklesla pod jednotkovou hodnotu již několik oktáv před dosažením nosného kmitočtu modulace. Pokud jde o frekvenční průběh přenosu ss větve, je třeba počítat s kapacitami elektronek a žádaného průběhu dosáhnout úpravou vazebních sítí podle obr. 9.

15.2.6. Dynamické chyby při analogickém řešení složitějších lineárních úloh

V obr. 10 je blokové schema modelu obecné lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$- a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} - \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_0\, y(t) = x(t)\,. \qquad (12)$$

Aby k řešení stačil jeden sumační zesilovač a n integračních zesilovačů, byla znaménka koeficientů volena střídavě kladná a záporná, takže není obecně nutno provádět inversi.

Určení celkové přesnosti modelu je už na první pohled velmi obtížné. Nejde ovšem o statické chyby — ty jsou nepatrné a není těžko je odhadnout — ale o chyby dynamické, k nimž dochází při řešení přechodné odezvy vlivem konečné šířky pásma použitých zesilovačů a působením svodového odporu kondensátorů ve zpětnovazební síti integračních zesilovačů. Oba vlivy je možno — jak již bylo ukázáno — respektovat úpravou idealisovaných přenosů uvedených v tabulce I, a to v případě sumačního zesilovače vztahem

$$- U_n(p) = - \left\{ \frac{1}{a_n} X(p) + \frac{a_{n-1}}{a_n} U_{n-1}(p) - \ldots + \frac{a_1}{a_n} U_1(p) - \right.$$
$$\left. - \frac{a_0}{a_n} U_0(p) \right\} \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\omega_s}}\,. \qquad (13)$$

a v případě m-tého integračního zesilovače vztahem

$$U_{m-1}(p) = - \frac{1}{p}\, U_m(p)\, \frac{T_c p}{1 + T_c p}\, \frac{1}{1 + \dfrac{p}{\omega_i}}\,. \qquad (14)$$

V rovnicích (13) a (14) značí T_c vybíjecí časovou konstantu styroflexových kondensátorů, ω_s a ω_i meznou frekvenci sumačního a integračního zesilovače, U_{m-1} výstupní napětí m-tého integrátoru.

Model sestavený z reálných počítacích zesilovačů neřeší danou rovnici (12), ale — jak lze odvodit dosazením výrazů z rovnic (13) a (14) do blokového schematu na obr. 10 — odlišnou rovnici operátorového tvaru

$$Y(p) \left\{ - a_n [f(p)]^n + a_{n-1} [f(p)]^{n-1} - \ldots - a_0 - a_n [f(p)]^n \frac{p}{\omega_s} \right\} = X(p)\,. \quad (15)$$

Rozdíl mezi oběma rovnicemi je v tom, že v rovnici (15) nahrazuje proměnnou p funkce $f(p)$

$$f(p) = \frac{(1 + T_c p)\left(1 + \dfrac{p}{\omega_i}\right)}{T_c}\,. \qquad (16)$$

a že tu je navíc člen $-a_n p[f(p)]^n/\omega_i$.

K stanovení přesnosti analogického výpočtu je theoreticky třeba řešit danou rovnici a výsledek řešení srovnat s odezvou modelu, definovanou rovnicí (15). Tato úloha je však i v poměrně jednoduchých případech těžko zvládnutelná. Snažší je hrubý — nebo jen kvalitativní — odhad přesnosti, plynoucí z frekvenčního pohledu na model.

Otevřená smyčka reálného modelu na obr. 10 má přenos

$$G(p) = \frac{a_0}{-a_n[f(p)]^n + a_{n-1}[f(p)]^{n-1} - \ldots + a_1[f(p)] - a_n \frac{p}{\omega_i}[f(p)]^n} . \tag{17}$$

S použitím funkce $G(p)$ není těžko upravit celkový přenos modelu — čili přenos jeho uzavřené smyčky — na tvar vhodný pro frekvenční řešení

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{a_0} \frac{G(p)}{1 - G(p)} . \tag{18}$$

Výraz $Y(p)/X(p)$ otvírá hledané jednoduché kvalitativní hledisko na přesnost modelu: Jde-li o úlohu s odezvou oscilačního charakteru, znamená to, že fáze $LG(j\omega)$ frekvenční charakteristiky funkce $G(p)$ je v bodě mezné frekvence ω_0 téměř nulová a $1 - G(j\omega_0) \doteq 0$, aby celková frekvenční odezva modelu dosáhla v okolí ω_0 potřebné resonanční špičky. Za těchto okolností se ovšem malé odchylky v přenosu otevřené smyčky modelu projeví mnohem výrazněji než v případech, kdy $|1 - G(j\omega_0)| \doteq 2$ a přechodná odezva je dostatečně tlumena. Je-li na příklad $|1 - G(j\omega_0)| \doteq 0{,}1$, pak nepatrný posuv fáze $LG(j\omega_0)$ z $-356°$ na $-357°$ — způsobený třebas tím, že pásmo pěti integračních zesilovačů modelu není neomezené, ale sahá ke konečné, i když poměrně vysoké frekvenci $300\omega_0$ — vyvolá patnáctiprocentní pokles resonanční špičky (z 10 na 8,5). Stejně nepatrný posuv fáze o 1° změní naproti tomu při $|1 - G(j\omega_0)| \doteq 0{,}8$ resonanční špičku desetkrát méně. Podobný je v obou případech i charakter změn přechodné odezvy na skok $x(t)$. Vztah mezi přechodnou a frekvenční odezvou je ostatně dobře znám z theorie frekvenčního řešení servomechanismů.

K bližší ilustraci možností analogického výpočtu postačí stručná analysa reálného modelu jednoduché diferenciální rovnice druhého řádu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A\frac{dy}{dt} + By = Bx , \tag{19}$$

jakou je na příklad definován servomechanismus s viskosním tlumením (v tom případě $A = 1/\tau_m$, $B = k/\tau_m$, τ_m je časová konstanta servomotoru, k konstanta rychlostní chyby). Model (obr. 11) řeší ve skutečnosti odlišnou rovnici

$$Y(p)\left\{\left[\frac{(1 + T_c p)(1 + \frac{p}{\omega_i})}{T_c}\right]^2\left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right) + A\left[\frac{\left(1 + T_c p\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)}{T_c}\right] + B\right\} = Bx . \tag{20}$$

Vliv konečné šířky pásma invertoru byl pro jednoduchost zanedbán.

Zajímavé jsou dva případy rovnice (19). Jde předně o rovnici harmonického pohybu

$$\frac{d^2y}{dt^2} + By = Bx , \tag{21}$$

která popisuje idealisovaný netlumený servomechanismus ($A = 0$, $\tau_m = k = \infty$) se sinusovou odezvou

$$y(t) = 1 - \cos\sqrt{B}\, t \tag{22}$$

na skokovou změnu x v čase $t = 0$. Skutečná odezva má, jak lze odvodit z rovnice (20), tvar sinusovky s exponenciálně stoupající či klesající amplitudou

$$y(t) = 1 - e^{+\left[B\left(\frac{1}{\omega_i} + \frac{1}{2\omega_s}\right) - \frac{1}{T_c}\right]t} \cos\sqrt{B}\, t . \tag{23}$$

Jestliže $B = 100$, $T_c = 5 . 10^5$ s $= 3 . 10^6$ s^{-1} a $= 10^5$ s, pak $y = e^{+0{,}0083t}$ . . sin $10t$ a amplituda sinusovky stoupne za 6 s (t. j. po deseti vlnkách) téměř o 1%. Na tento typ odchylky skutečné odezvy od theoretického tvaru netlumené sinusovky ukazuje i posuv fáze frekvenční charakteristiky otevřené smyčky modelu vyvolaný nepřesností analogií integrace, sumace a inverse. Jak plyne z amplitudové charakteristiky přenosu otevřené smyčky modelu

$$G(p) = \frac{BT_c^2}{\left(1 + T_c p\right)^2\left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)^2\left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right)} \tag{24}$$

v obr. 12a, dochází na frekvenci ω_0 k posuvu fáze dozadu přibližně o přírůstkový úhel

Δ [redacted] $(j\omega_0) \doteq \left(2\frac{1}{T_c\sqrt{B}} - \frac{\sqrt{B}}{\omega_s} - 2\frac{\sqrt{B}}{\omega_i}\right)\frac{360°}{2\pi} \doteq -0{,}01°$ (25)

a amplitudová charakteristika neprochází kritickým bodem, jak by tomu mělo být s dokonalým modelem, ale oblastí exponenciálně rostoucích oscilací.

K mnohem příznivější situaci dochází při modelování dobře tlumeného servomechanismu s $\tau_m = 0{,}1$ s, $k = 10$ s^{-1}, $A = 10$ s^{-1}, $B = 100$ s^{-2} a s přenosem otevřené smyčky

$$G(p) = \frac{BT_c^2}{\left(1 + T_c p\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)\left[AT_c + \left(1 + T_c p\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_s}\right)\right]} . \tag{26}$$

Theoretická odezva na jednotkový skok vstupu v čase $t = 0$

$$y(t) = 1 - e^{-5t}(\cos 8{,}65t - 0{,}115 \sin 8{,}65t) \tag{27}$$

se liší od odezvy reálného modelu s týmiž hodnotami T_r, ω_1, ω_2 jako v předešlém případě jen nepatrně. O tom svědčí zanedbatelný účinek parasitních konstant modelu na přenos uzavřené smyčky: Nežádoucí změna fáze frekvenční charakteristiky otevřené smyčky modelu z -135 na $-135{,}01°$ zvětší resonanční špičku odezvy uzavřené smyčky o méně než 0,1 %. Stejně zanedbatelná je přirozeně i změna přechodné odezvy: Se stoupnutím resonanční špičky poklesne tlumení servomechanismu asi o 0,05 % a skutečná přechodná odezva má následkem toho tvar, který nelze od rovnice (27) žádným způsobem odlišit.

Ze zjednodušeného rozboru nepřesnosti analogického výpočtu plynou důležité poznatky i o rychlosti, s jakou lze řešení provádět. Rychlost řešení dosažitelná s počítačem rozhoduje o volbě časového měřítka, kterým je možnou dobu trvání výpočtu buď prodloužit nebo zkrátit. Je-li doba potřebná k výpočtu dosti krátká — a to je, jak je zřejmé z provedené analysy, v případech velké šířky pásma zesilovačů a malých nároků na přesnost — je možno řešení opakovat a výsledek zobrazit na oscilografu s opakovací časovou základnou synchronisovanou s chodem počítače.

K ujasnění problematiky periodisace řešení je možno vyjít z informací o analysovaném modelu diferenciálních rovnic 2. řádu. Periodické řešení rovnic se silně oscilujícím výsledkem je na modelu, o němž byla řeč, stěží možné, nejvýše by se dalo uvažovat o jednom řešení za několik vteřin. Naproti tomu případy s dobře tlumenými odezvami by bylo možno řešit i několikrát za vteřinu, neboť i při desetinásobném zvýšení frekvence zákmitu by se amplituda první špičky přechodné odezvy nezvýšila o víc než 1 %. I tak by se ovšem nemohlo sáhnout k opakovací frekvenci 50 Hz, jež je u repetitivních počítačů běžná, neboť doba použitelná k řešení by nutila zvýšit frekvenci zákmitů nejméně na 500 Hz. Dosažený výsledek je přesto příznivý: Model byl sestaven ze zesilovačů konstruovaných pro jednorázový chod a možnost opakovat řešení třebas jen jednou za vteřinu bude v některých případech velmi vítána.

15.3. Nelineární úlohy

Mnohem větší potíže než s lineárními vztahy jsou při analogickém výpočtu obyčejně s realisací nelineárních operací. Jde o násobení a podíl proměnných, o výrobu funkčních průběhů a o další vztahy, při nichž poměr výstupu ke vstupu závisí na amplitudě vstupních veličin nebo je ovlivňován proměnnými parametry úlohy. Tyto nelineární operace se v elektronických analogických počítačích řeší různými způsoby, ale žádná ze známých method se zdaleka neblíží dokonalosti lineárních analogií. To je pochopitelné. Všechny elementární lineární závislosti lze realisovat pomocí vysoce stabilních a frekvenčně téměř nezávislých jednoduchých pasivních elektrických prvků — odporů a kondensátorů. K získání složitějšího lineárního vztahu stačí potřebnou kombinaci pasivních prvků doplnit zesilující elektronickou částí, která obstará nutný převod napětí na proud, aniž by přenos pasivních prvků znatelně ovlivnila. K realisaci elementárních nelineárních operací je naproti tomu nutno použít prvků, které buď nejsou stabilní (na příklad elektronky) nebo jsou silně frekvenčně závislé (toho druhu jsou všechny prvky elektromechanické, jako počítací potenciometry, motory a pod.).

15.3.1. Modelování nelineárních operací založené na diodové charakteristice

Nejpřesnějším a nejstabilnějším elektronickým elementem nelineárních analogií je vakuová dioda s výrazně nelineárním průběhem závislosti proudu na napětí. Základní zapojení diody, které této nelinearity využívá, je na obr. 13. Na dalším obrázku 14 je ukázáno, jaké různé průběhy umožní volba polarity, vstupního napětí, konstantního ss napětí U a směru propustnosti diody.

K získání analogií složitějšího tvaru nelineárních funkcí stačí použít vhodné kombinace základních diodových obvodů. Postupuje se tak, že se žádaný funkční průběh aproximuje řadou lineárních úseků, pro každý z těchto úseků se navrhne příslušný elementární diodový nelineární obvod, na vstupy všech diodových obvodů se zavede vstupní signál dané úlohy a jejich výstupní napětí se sečtou pomocí počítacího zesilovače v sumačním zapojení. K ilustraci této methody je na obr. 15 ukázáno schema analogie jednoduché nelineární úlohy

$$\begin{aligned} y &= k_1 x + k_1 B && \text{pro} \quad x < -B\,, \\ &= 0 && \text{pro} \quad -B < x < A\,, \\ &= k_2 x - k_2 A && \text{pro} \quad x > A\,, \end{aligned} \tag{28}$$

při níž jde v podstatě o modelování oblasti necitlivosti. Řada schemat analogií jiných nelineárních operací tohoto druhu je uvedena v [3]. Další složitější nelineární průběhy — na příklad kvadrát vstupního napětí, úseky goniometrických funkcí a pod. — lze nastavit na diodovém generátoru funkcí odvozeném stejnou methodou. Schema generátoru, který aproximuje nelineární průběhy čtrnácti lineárními úseky s nastavitelnými mezemi a stoupáním, je uvedeno v [1]. Počet lineárních úseků tohoto generátoru je pro většinu funkcí více než postačující. Větší chyby než aproximace funkcí pomocí konečného počtu lineárních úseků způsobuje obyčejně nejistá hodnota přepínacího potenciálu diody (chyba z této příčiny může činit i několik desetin voltu) a nenulový a nestabilní odpor diody v propustném směru (jeho změny činí stovky ohmů). Chyby způsobené oběma těmito vlivy jsou sice ve srovnání s odpovídajícími nepřesnostmi analogií lineárních operací vysoké — drift počítacího zesilovače s nulováním nepřesahuje 1 mV a nestabilita poměrů impedancí Z_0 a Z_i je značně menší než 0,1 % při libovolné hodnotě Z_0 a Z_i — ale širokopásmovou generaci nelineárních průběhů nelze pravděpodobně provést jiným způsobem přesněji.

Pomocí diodového generátoru nelineárních funkcí je možno realisovat řadu nelineárních operací. Na použití generátoru kvadratických přenosů je na příklad založena násobička dvou proměnných veličin, x a y, vycházející ze vztahu

$$xy = \tfrac{1}{4}(x + y)^2 - (x - y)^2 \,. \tag{29}$$

O této násobičce bude řeč v [3].

Nepřesnostmi typickými pro diodové nelineární analogie trpí pochopitelně také všechny analogie využívající nelineární charakteristiky zesilujících elektronek — na příklad exponenciální mřížkovou charakteristiku — a to je ještě nejčastěji nutno počítat s mnohem většími chybami. Výhodou všech elektronických analogií je ovšem široké pásmo přenosu a poměrně nenáročná konstrukce, což v četných případech — a téměř vždy při řešení regulačních úloh — nedostatky elektronických nelinearit víc než vyváží.

V jiných místech analogického výpočtu se naopak vystačí s úzkým pásmem několika málo cyklů, ale zato se požaduje, aby řešení bylo co nejpřesnější. V těch případech je nutno sáhnout po elektromechanickém nelineárním prvku — přesném počítacím potenciometru. Každý potenciometr může být nelineární dvěma způsoby: Lineární není především závislost mezi oběma jeho elektrickými veličinami — napětím přiloženým na potenciometr a napětím mezi běžcem a jedním koncem vinutí — neboť ji lze ovlivnit polohou běžce. A kromě toho může být samo vinutí potenciometru nelineární a tím i vztah mezi napětím a polohou běžce.

15.3.2. Tyčové a šroubovicové potenciometry VÚT

Počítací potenciometry jsou pro každý přesný analogický počítač prakticky stejně důležité jako elektronické části počítacích zesilovačů. Rozdíl je v tom, že k sestavení zesilovačů stačí běžné radiové součásti (potřebu kvalitního vibračního relé je možno v krajním případě obejít), zatím co přesné počítací potenciometry s příslušenstvím jsou velmi drahé a někdy dokonce nedostupné. Otázka potenciometrů se proto nedá jednoduše přejít. Každé vážnější úvaze o stavbě počítače musí předcházet vyřešení problému — z jakého zdroje bude možno potřebné potenciometry čerpat.

Ve VÚT bylo rozhodnuto pokusit se o zvládnutí technologie potenciometrů vlastními prostředky, třebas bylo jasné, že to bude stát značnou část výzkumné a vývojové kapacity, jež byla počítačům věnována. Pro toto rozhodnutí mluvily i nepříliš příznivé informace o nejlepších zahraničních potenciometrech. Žádné z potenciometrů, jež jsou v zahraničí na trhu, totiž nemají současně — pokud lze zjistit — všechny žádané vlastnosti — vysokou přesnost daného průběhu i celkového odporu, široký sortiment nelineárních průběhů, počítaje v to i nemonotonní goniometrické průběhy, malé rozměry, nepatrné nároky na hnací moment, levnou automatisovanou výrobu.

Práce na potenciometrech byly rozděleny do dvou etap: Cílem první etapy bylo dosáhnout jakosti nejlepších zahraničních potenciometrů kruhových (na příklad potenciometrů vyvinutých spoluprací amerických firem Bell Telephone Laboratories a Western Electric Company) a při výrobě současně uplatnit moderní automatisační methody alespoň natolik, kolik jich je vlazeno do procesu výroby zahraničních šroubovicových potenciometrů. Do jaké míry se to podařilo, ukazuje výsledek prací první etapy, tyčový potenciometr VÚT, vyráběný nyní v n. p. Elektrosignál. Hlavní údaje o tyčovém potenciometru (podrobnější informace jsou v referátu podaném na IV. konferenci o strojích na zpracování informací [4]): Vinutí tyčového potenciometru je přesně lineární — žádaný funkční průběh zajišťuje spirálová drážka, která převádí vstupní otočný pohyb hřídele na podélný posuv běžce. Výroba funkční drážky i navíjecí proces jsou úplně automatisovány. Požadovaný průběh výstupního napětí je u potenciometru délky 0,5 m dodržen s přesností 0,05% a téměř stejná je také tolerance celkového odporu. Po všech těchto stránkách může tyčový potenciometr soutěžit s nejlepšími zahraničními výrobky. Je však podstatně větší než zahraniční spirálové potenciometry, potřebuje větší moment k posuvu běžce a je horší i po některých dalších stránkách praktického použití.

Proto bylo přikročeno k druhé etapě prací se snahou vyrovnat se i s těmito nedostatky. Výsledek vývoje není ještě skončen, ale všechny hlavní problémy se již podařilo vyřešit. Z tyčového potenciometru zůstal princip použitých method automatisace navíjecího procesu a myšlenka realisace nemonotonních funkcí pomocí mechanického přepínacího zařízení. Hlavní rozdíl je v přechodu na šroubovou odporovou dráhu, která umožňuje zmenšit rozměry a zlepšit resoluci, a v způsobu transformace lineárního vstupu — otočného pohybu hřídele — na funkční elektrický výstup, která je u nového spirálového potenciometru VÚT provedena proměnným stoupáním Kohlrauschova odporového vinutí. Navíjecí proces je zautomatisován pomocí kopírovacího systému založeného na principu Wheatstonova můstku, který je plynule vyrovnáván servomechanismem. Šroubovicové potenciometry VÚT — lineární i nelineární — a to včetně náročného průběhu silně zatížených goniometrických funkcí — mají stejnou přesnost jako tyčové potenciometry, asi čtyřikrát lepší resoluci (na dvoumetrové dráze lineárního dvacetiotáčkového potenciometru střední velikosti 40×100 mm o odporu 100 kΩ je na příklad asi 25000 závitů odporového drátu o průměru 0,05 mm), nízký hnací moment (kolem 30 gcm) a malé vnější rozměry. Tyto příznivé údaje doplňuje vhodně i úspěch celkové koncepce mechanického provedení řešené s použitím moderní zalévací techniky.

Fotografie tyčových a šroubovicových potenciometrů VÚT jsou na obr. 16 a 17.

15.33. Řešení nelineárních úloh pomocí počítacích servomechanismů

Analogické řešení elementárních nelineárních úloh, založené na nelineárních vlastnostech potenciometrů, vychází zásadně ze stejné zpětnovazební methody, jaká je použita v elektronických analogiích lineárních vztahů. Zásadní rozdíl proti počítacímu zesilovači je v tom, že je nutno operovat nejen s elektrickým, ale i s mechanickým vyjádřením proměnných, neboť jedním z parametrů, které se při řešení nelineární úlohy plynule mění, je posuv či natočení běžce potenciometru. K realisaci příslušné transformace elektrické veličiny na mechanickou, je třeba elektronickou zesilující část zpětnovazebního analogického systému doplnit servomotorem a tak počítací zesilovač změnit — podle známé definice servomechanismu [5] — v počítací servomechanismus.

Funkce počítacího servomechanismu je patrna z blokového schematu na obr. 18. Jde o analogii jednoduché nelineární implicitní úlohy

$$f_a(y) = x \tag{30}$$

s nezávisle proměnnou x a závisle proměnnou y. Obdoba s počítacím zesilovačem je zřejmá. Úlohu zpětnovazební pasivní elektrické sítě, v níž se v případě počítacího zesilovače odčítá vhodná lineární funkce výstupního signálu od lineární funkce vstupního signálu, vykonává v nelineární analogii čárkovaně ohraničená síť s funkčním potenciometrem P_1, umožňujícím provedení žádané nelineární transformace mechanického výstupního signálu φ_y na elektrické napětí u_f úměrné funkci $f_a(y)$. Rozdílové napětí se v obou případech převádí pomocí silně zesilující části systému na výstupní signál. Výstupním signálem zesilující části S počítacího servomechanismu je poloha běžce potenciometru a proto — jak už o tom byla řeč — je do výstupu bloku S vřazen servomotor. Bod A' blokového schematu nelineární analogie je jako bod A počítacího zesilovače (obr. 1) virtuálně uzemněn. Druhý — lineární — potenciometr P_2, který se analogického řešení úlohy definované rovnicí (30) přímo neúčastní, vykonává pomocnou funkci. Slouží k převodu výstupního natočení φ_y na úměrné elektrické napětí u_y, aby výstup řešení měl stejnou elektrickou formu jako vstup.

Jak je zapojena analogie nejtypičtější nelineární úlohy — součinu funkcí času x a y

$$z(t) = x(t)\,y(t) \tag{31}$$

to ukazuje schema na obr. 19. V analogickém obvodu jsou dva servomechanismy, ale jeden z nich ($S1$) do zpětnovazebního řešení vstupuje jen nepřímo: Je použit k převodu vstupního elektrického signálu $u_x = k_1 x$ na úměrné natočení hřídele lineárního potenciometru P_2, který je částí zpětnovazební sítě vlastního počítacího servomechanismu analogie. Potenciometr P_2 má tak dva proměnné vstupy odpovídající vstupním veličinám x a y dané nelineární úlohy a napětí jeho běžce je proto úměrné součinu xy. Nelineární transformace se tentokráte provádí, jak vidět, ve vstupní části zpětnovazební sítě počítacího servomechanismu.

Další typy nelineárních úloh lze odvodit z obou základních analogií. Na příklad podíl dvou proměnných

$$z(t) = \frac{y(t)}{x(t)} \tag{32}$$

se řeší jako násobení, ale potenciometr P_2 je vinutí nelineárně, aby u_x bylo úměrno funkci $1/x$.

Všechny nelineární analogie — a to je opět obdoba s počítacím zesilovačem — se vzájemně liší jen zapojením zpětnovazební větve. Zesilující část počítacího servomechanismu je možno proto konstruovat pro modely všech nelineárních úloh jednotnou, nehledě ovšem na nutné jednoduché úpravy stabilisačního obvodu podle charakteru úlohy a na potřebu nastavovat hodnotu zesílení. Konstrukce ovšem vychází ze stejných zásad, jaké plynou ze zpětnovazební analysy počítacího zesilovače, ale situaci ztěžují potíže se zpožděním servomotoru a řadou mechanických nelinearit, které při synthese čistě elektronických obvodů odpadají.

Stručně o tom, jakými cestami probíhaly práce na počítacích servomechanismech ve VÚT.*)

*) Podrobnější pojednání je v [6].

V první etapě vývoje se dospělo ke klasickému střídavému přístrojovému servomechanismu s miniaturním dvoufázovým asynchronním servomotorem, st elektronickým zesilovačem napětí $Z1$ a výkonu $Z2$ a s modulací ss chybového napětí pomocí vibračního relé R (obr. 20). K stabilisaci bylo použito počítacího zesilovače s úměrným plus derivačním přenosem (tabulka I, řádek 19)

$$u_0 = -(u_1 + u)\,k_1 \frac{1 + \tau_a p}{1 + \tau_b p}, \tag{32}$$

aby přenos otevřené smyčky servomechanismu

$$ky(p) = k \frac{1}{p(1 + \tau_m p)} \frac{1 + \tau_a(p)}{1 + \tau_b(p)} \tag{33}$$

měl amplitudovou charakteristiku tvaru grafu na obr. 21. Graf ukazuje, jak se dosahovalo žádané šířky pásma přenosu: Pásmo je v podstatě určeno hodnotou časové konstanty servomotoru τ_m a zesílením — konstantou rychlostní chyby — k. Je-li k pevně stanoveno požadavky na přesnost, je nastavení pásma třeba provést nastavením konstanty τ_m pomocí setrvačníku S potřebné velikosti na hřídeli motoru. Minimální šířka pásma je přirozeně určena setrvačností motoru bez setrvačníku.

Servomechanismy tohoto druhu pracovaly celkem spolehlivě. Určité potíže byly jen s realisací velmi úzkého pásma přenosu pomocí nepříjemně velkého setrvačníku a nevyhovovaly také velké rozměry a náročnost výkonové části elektronického zesilovače a příslušného napájecího zdroje. Obě potíže měla vyřešit druhá etapa prací.

Při zmenšování rozměrů počítacího servomechanismu byly vyzkoušeny nové typy pohonů s méně náročným zesilovačem, jež se proto zdály na první pohled slibnější. Postupně byly prozkoumány teoretické i praktické otázky návrhu a konstrukce přístrojových pohonů s magnetickými spojkami úměrnými i spínacího typu, se ss motorky řízenými thyratrony či magnetickými zesilovači v kotvě a ss motorky řízenými elektronicky v magnetech. Dvoufázový asynchronní motor přístrojové velikosti se však nepodařilo nahradit ani vlastnostmi ani rozměry. Úsporu místa bylo nutno hledat jen v konstrukci výkonové části servozesilovače. Nejuspokojivější výsledek přineslo zatím použití nového obousměrného obvodu magnetického zesilovače s půlcyklovou odezvou, který tvoří s dvoufázovým st motorem velmi výhodnou kombinaci. Konečné řešení, ke kterému bude možno sáhnout až za několik let, přesto s magnetickými zesilovači nepočítá, a spoléhá na slibný vývoj výkonových transistorů.

Problém nastavení pásma přenosu byl vyřešen vyvinutím dvou kvalitních rychlostních servomechanismů s vysokou ss hodnotou přenosu otevřené smyčky. U prvního z obou systémů, do jehož obvodu byl za st motor vřazen mechanický integrátor s kotoučem a kuličkou, dosahuje přenos dokonce nekonečné hodnoty, u druhého, v jehož smyčce je jen motor, hodnoty asi 60 dB. To znamená, že v obou případech je pro řízení polohy k disposici dokonalý integrátor, a šířku pásma počítacího polohového servomechanismu je možno nastavit na libovolně malou hodnotu vhodnou volbou konstant stabilisačního filtru s úměrným plus integrálním přenosem. Charakteristika otevřeného obvodu počítacího servomechanismu má ovšem stejný tvar jako na obr. 21, ale úlohu konstanty τ_m určující šíři pásma, přebírá hlavní časová konstanta stabilisátoru.

To byl směr, kterým postupovaly práce na systémech servomechanismů. S nimi se souběžně řešila řada problémů elektrické i mechanické konstrukce, protože bylo nutno opatřit servomechanismy potřebnými elementy. Stručně o výsledcích: Kromě vibračního relé, o němž byla řeč již v souvislosti s počítacími zesilovači, byly vyvinuty přístrojové st servomotorky pro 50 i 500 Hz s vysokým poměrem záběrného momentu a momentu setrvačnosti (čtyřpólový motorek 500 Hz/1,5 W má maximální záběrný moment 40 gcm, moment setrvačnosti 1 gcms² a $M_z/J = 40000\ s^{-2}$) a tedy s minimální časovou konstantou τ_m (theoretická časová konstanta, odpovídající uvedené hodnotě M_z/J a synchronním otáčkám 15000 ot/min, činí asi 0,04 s) (obr. 22). Z mechanických elementů běží o dvě provedení integrátorů s kotoučem a kuličkou a o nejrůznější pohybové mechanismy, počínaje převodovými skříňkami servomotorů a konče několika typy spojek. Servomechanismy bylo třeba dále opatřit servozesilovači s elektronickými a magnetickými zesilujícími stupni různého výkonu a zesílení.

15.4. Vstupní a výstupní jednotky

Při každém analogickém řešení je třeba do počítací sítě dané úlohy zavést vhodnou časovou změnu jedné či většího počtu nezávisle proměnných a zaznamenat průběh odezvy všech závisle proměnných, které jsou pro řešení důležité. Do modelu typického polohového servomechanismu se na příklad obyčejně zavádí skoková změna — nebo skok rychlosti či zrychlení — napětí, představujícího vstupní úhel servomechanismu a zaznamenává se příslušná časová odezva napětí odpovídajícího výstupního úhlu. V tomto případě — a podobně tomu je i při modelování řady dalších regulačních úloh — stačí vstupní jednotku vybavit spínačem a potřebným počtem integračních zesilovačů a výstup zapsat pomocí vhodného (na příklad několikasmyčkového) oscilografu.

U mnoha úloh se s jednoduchými vstupy nevystačí. Často je výhodné zavést do některého vstupu šum — v tom případě je nutno vstupní jednotku doplnit použitím vhodného generátoru šumu — a někdy se místo jednoduchých normálních vstupů, jež je možno vyrobit lineární úpravou skokové změny napětí, žádá složitější časová funkce vstupního signálu. Tady se obyčejně uplatní diodový generátor funkčních průběhů buzený lineárně rostoucím napětím z integračního zesilovače.

A nevystačí se mnohdy ani s oscilografickou výstupní jednotkou, neboť jednak oscilograf není nikdy natolik přesný, aby využil možnosti analogického výpočtu, a jednak je často třeba vynášet vzájemnou závislost dvou proměnných, z nichž ani jednou není čas. Lepší využití přesného analogického počítače umožní zapisovač XY — čili koordinátograf — s dvěma servomechanismy použitými k převodu ss napětí, odpovídajících dvěma proměnným veličinám úlohy na úměrný posuv ve dvou kolmých směrech odpovídajících proměnným pravoúhlým souřadnicím zápisu. Má-li být jednou proměnnou čas t, musí jeden z obou polohových servomechanismů být schopen i funkce velmi přesného generátoru konstantní rychlosti. Kvalitní zapisovač je dále užitečné doplnit snímačem křivek. Jde o možnost zpětného převodu zápisu na přesně úměrné ss napětí vhodné k buzení počítače libovolnou časovou změnou vstupní veličiny (zapisovač koná v tom případě i funkci vstupní jednotky počítače). Na konstrukci zapisovače XY vybaveného snímačem křivek i možností plynulého posuvu přesně definovanou konstantní rychlostí, což vše souhrnně představuje komplexní úkol velmi náročný jak po elektrické tak po mechanické stránce, se právě ve VÚT pracuje.

Mezi vstupy počítače je možno zahrnout i počáteční podmínky řešené úlohy. Jde o napětí, která musí být zavedena před začátkem řešení do všech integračních zesilovačů modelu, aby při spuštění výpočtu byla ve všech bodech počítací sítě napětí přesně odpovídající stanoveným počátečním podmínkám. Zavedení vhodného napětí na výstup integračního zesilovače nečiní při jednorázovém řešení potíží. Je možno postupovat tak, že se zpětnovazební síť integrátoru přepne před započetím řešení do tvaru uvedeného v tabulce I na řádku 11 a do jejího vstupu se zavede napětí potřebné k získání žádaného u_0, a při spuštění řešení se přepne do tvaru nutného k realisaci integrace (řádek 3).

Uvažované vstupní i výstupní jednotky umožňují výpočtářské použití počítače. Při zapojení počítače do výrobního či měřícího procesu je často třeba zajistit dálkový přenos úhlu natočení hřídele, po případě přenos kterékoliv jiné mechanické veličiny, již je možno převést na úhel. K tomu účelu byly ve VÚT vyvinuty přesně velmi rychlé širokopásmové vstupní servomechanismy se selsynovým indikátorem odchylky. Jejich technika vyšla z řešení počítacích servomechanismů [6].

15.5. Závěr

Přednáška o elektronických metodách analogického výpočtu měla dva cíle. Šlo v ní předně o obecnou problematiku elektronických (a zčásti i elektromechanických) analogií a kromě toho měla stručně informovat o některých z výsledků, které byly na poli analogických počítačů dosaženy ve Výzkumném ústavu telekomunikací.

O analogických metodách byla řeč již na I. konferenci o automatisaci [8]. Proto bylo možno předpokládat znalost základních pravidel analogického výpočtu a soustředit pozornost především na ty stránky, které rozhodují o přesnosti nebo jsou důležité s hlediska praktického použití. Úvahy tohoto zaměření, jež byly do přednášky vřazeny, jsou z větší části původní. To se týká především stati o modelech lineárních úloh, tvořící jádro přednášky.

Informace o prvcích analogií, vyvinutých ve VÚT, jsou doplněny v dalších přednáškách podrobnějším pojednáním o servomechanismech konstruovaných pro použití při analogickém výpočtu [6] a o sestavě počítačů [3, 7].

Literatura

[1] Trudy vtorogo vsesojuznogo sověščanija po těorii avtomatičeskogo regulirovanija, Izd. AN SSSR, 1955.

[2] B. Mirtes, Stejnosměrný zesilovač v analogických počítačích. Vyjde ve Slabopr. obz.

[3] J. Škarda, Analysa a synthesa servomechanismů s nelinearitami na analogickém počítači. Uveřejněno v tomto sborníku.

[4] J. Podzimek, Přesné tyčové potenciometry pro analogové počítací stroje. Stroje na zpracování informací. Sborník IV. nakladatelství ČSAV, 1956.

[5] G. S. Brown, D. P. Campbell, Principles of servomechanisms, J. Wiley & Sons, New York 1948.

[6] Z. Sládek, Servomechanismy použité v analogickém počítači. Uveřejněno v tomto sborníku.

[7] Z. Fixa, Celková koncepce analogického počítače VÚT. Uveřejněno v tomto sborníku.

[8] Souhrn prací o automatisaci. Nakladatelství ČSAV, 1955.

Obr. 1. Blokové schema počítacího zesilovače s automatickým nulováním.

Obr. 2. Amplitudové charakteristiky přenosu otevřené smyčky počítacího zesilovače v sumačním zapojení (*a*) a v zapojení jako integrátor (*b*).

Obr. 3. Korekce průběhu vinutí potenciometru nutná k dosažení lineárního přenosu $u_0 = ku_i$ (pro k proměnné od 0 do 1) s potenciometrem zatíženým neproměnným odporem.

Obr. 4. Jednoduché obecné zapojení počítacího zesilovače.

Obr. 5. Vibrační relé VÚT ve srovnání s běžným vibračním relé (*a*) a s miniaturní elektronkou (*b*).

Obr. 6. Počítací zesilovač se třemi dvojitými triodami.

Obr. 7. Počítací zesilovač se dvěma dvojitými triodami a se dvěma pentodami.

Obr. 8. Závislost mřížkového proudu triody na předpětí mřížky při konstantním anodovém napětí.

Obr. 9. Obecný tvar vazební sítě elektronek ve ss zesilující větvi (*a*) a zjednodušené náhradní zapojení (*b*); frekvenční část přenosu sítě má přibližně tvar $g(p) = \frac{1 + C_a R_d p}{1 + C_a R_b p}$ jestliže $(R_c + R_d) > R_a > R_f$, $R_c > R_b$, $C_a > (C_0 + C_1)$, $C_b = R_d C_d / R_c \to 0$, $R_b C_0 \to 0$.

Obr. 10. Model obecné lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Obr. 11. Model jednoduchého servomechanismu definovaného lineární diferenciální rovnicí 2. řádu.

Obr. 12. Amplitudové charakteristiky otevřené smyčky diferenciálních rovnic $d^2y/dt^2 + By = Bx$ (*a*), $d^2y/dt^2 + A\,dy/dt + By = Bx$ (*b*).

Obr. 13. Elementární nelineární obvod využívající diodové nelinearity.

Obr. 14. Čtyři odlišná zapojení elementárního nelineárního obvodu.

Obr. 16. Tyčový potenciometr VÚT.

Obr. 17. Šroubovicové potenciometry VÚT.

Obr. 15. Analogie „necitlivé oblasti".

Obr. 18. Řešení nelineární úlohy $I_a(y) = x$ pomocí počítacího servomechanismu.

Obr. 19. Násobení dvou proměnných x a y pomocí počítacích servomechanismů.

Obr. 20. Blokové schema počítacího servomechanismu.

Obr. 21. Amplitudová charakteristika počítacího servomechanismu s úměrným plus derivačním přenosem.

Obr. 22. Prvky počítacích servomechanismů vyvinuté ve VÚT (spirálový potenciometr, vibrační relé, servomotorek 50 Hz/3 W, servomotorek 500 Hz/1,5 W).

$$u_0 = -u_i$$

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1} u_i$$

$$u_0 = -\frac{1}{pCR} u_i$$

$$u_0 = -pCRu_i$$

$$u_0 = -\left(\frac{R_0}{R_1} u_1 + \frac{R_0}{R_2} u_2 + \dots \frac{R_0}{R_n} u_n\right)$$

$$u_0 = -\frac{1}{p}\left(\frac{u_1}{R_1 C} + \frac{u_2}{R_2 C} + \dots + \frac{u_n}{R_n C}\right)$$

$$u_0 = -\frac{1}{\alpha} u_i, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1$$

$$u_0 = -\alpha u_i$$

$$u_0 = -\frac{1}{p\frac{RC}{\alpha}} u_i$$

$$u_0 = -p\frac{RC}{\alpha} u_i$$

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + pR_2C} u_i$$

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1 + pR_1C}{p} u_i$$

$$u_0 = -\frac{1 + pR_2C}{pR_1C} u_i$$

$$u_0 = -\frac{pR_2C}{1 + pR_1C} u_i$$

$$u_0 = -\frac{pR_2C_1}{(1 + pR_1C_1)(1 + pR_2C_2)} u_i$$

$$u_0 = -\frac{(1 + pR_1C_1)(1 + pR_2C_2)}{p^2R_1C_2} u_i$$

$$u_0 = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1 + pR_2C_2}{1 + pR_1C_1} u_i$$

$$u_0 = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1 + pR_1C_1}{1 + pR_2C_2} u_i$$

$$u_0 = -\left(\frac{R_a + R_c}{\alpha R_1} u_1 + \frac{R_a + R_c}{\alpha R_2} u_2 + \dots + \frac{R_a + R_c}{\alpha R_n} u_n\right)\frac{p\left(R_b + \frac{R_a R_c}{R_a + R_c}\right)C + 1}{pCR + 1}.$$